Exercices d'oraux ENS – Session d'été 2025

Cécile Gachet

28 août 2025

Exercice 1. (Idempotent, nilpotent) Soit A un anneau unitaire tel que tout $x \in A$ satisfait $x^2 = x$ ou bien est nilpotent. Montrer que tout élément $x \in A$ satisfait $x^2 = x$.
Bonus (facile). En déduire que A est commutatif.

Démonstration. Si A est l'anneau nul, c'est bon. Supposons maintenant $A \neq \{0\}$. On montre déjà que A a caractéristique 2 : comme $-1 \in A$ n'est pas nilpotent, on a $1 = (-1)^2 = -1$ dans A, donc $2 = 0$.

Soit x un élément nilpotent non-nul de A. Notons que $x+1$ est aussi nilpotent : sinon, par l'absurde on aurait

$$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = x + 1,$$

donc $x^2 = x$, ce qui contredit la nilpotence de x. On peut donc définir $n \in N, n \geq 2$ minimal tel que $x^n = (x+1)^n = 0$ dans A.

Voilà deux façons de conclure :

Version 1 : on a alors

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k = 0$$

et toujours $x^n = 0$. On en déduit, par une récurrence descendante sur k, que $x^k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: l'initialisation est claire, l'induction consiste à vérifier que

$$x^{k+1} = 0 \Rightarrow x^k = x^k S = 0.$$

On obtient alors que $x = 0$, ce qui est une contradiction.

Version 2 : on note alors que

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

est un inverse pour l'élément $1 - x$, qui ne peut donc pas être nilpotent. On a donc $(1-x)^2 = 1 - x$, et en développant on obtient $x^2 = x$, ce qui est absurde.

Donc tous les éléments de A sont idempotents, et on obtient notamment, pour tous $x, y \in A$,

$$xy - yx = xy + yx = (x+y)^2 - x^2 - y^2 = 0,$$

i.e. A est bien commutatif. $\square$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On considère l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de taille n et son sous-ensemble $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R})$ des matrices définies positives. Classifier les symétries linéaires de $S_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan de $S_n(\mathbb{R})$ et préservent l'ensemble $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration, version 1. Pour $n = 1$, on peut identifier $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$: les symétries linéaires de $\mathbb{R}$ sont les multiplications par 1 et -1, ainsi seule l'identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convient.

Fixons maintenant $n \geq 2$ et procédons par analyse et synthèse. Soit σ une symétrie linéaire de $S_n(\mathbb{R})$ qui fixe un hyperplan H et préserve l'ensemble $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R})$. Notons que la multiplication et la trace définissent un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$, ce qui permet de choisir une matrice $P \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $H = \ker(A \mapsto \mathrm{tr}\, AP)$. Par la description usuelle des symétries linéaires, il existe un élément $M \in S_n(\mathbb{R})$ non-nul tel que $\sigma(M) = -M$. On note alors que

$$\sigma - \mathrm{id} = \frac{-2\mathrm{tr}(\bullet P)}{\mathrm{tr}(MP)} M$$

car ces deux applications linéaires ont le même hyperplan noyau, et coincident sur la droite supplémentaire engendré par M.

Quitte à conjuguer P et M par un matrice orthogonale, on peut supposer que M est diagonale de la forme $\mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_n)$. Quitte à remplacer M par son opposé, on peut aussi supposer que $\mathrm{tr}(MP) > 0$. Dans cette nouvelle base, σ préserve à la fois l'ensemble des matrices définies positives et l'ensemble des matrices diagonales, ce qui implique que pour tous $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on a :

$$a_i \,\mathrm{tr}(MP) > 2m_i \sum_{j=1}^{n} a_j p_{jj}.$$

Autrement dit,

$$\mathrm{tr}(MP) > 2m_i p_{ii} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_i} m_i p_{jj}. \tag{1}$$

En particulier, à i fixé, on peut choisir des $(a_j)_{j \neq i}$ arbitrairement grands, ce qui implique

$$\text{pour tous } i \neq j, \text{ on a } m_i p_{jj} \leq 0. \tag{2}$$

S'il existe i_1, i_2 tels que m_{i_1} et m_{i_2} sont non-nuls et de même signe, alors tous les p_{jj} sont de même signe par (2). Comme $\mathrm{tr}(MP) > 0$, l'un des produits $m_i p_{ii}$ est strictement positif, donc d'après (1), en choisissant des a_j suffisamment petits pour $j \neq i$, on obtient un deuxième produit $m_{i'} p_{i'i'}$ strictement positif. Cela force tous les $(m_k)_{1 \leq k \leq n}$ à être de même signe (ou nul) par (2). En particulier, la matrice M est définie positive ou définie négative, et cela contredit le fait que $\sigma(M) = -M$.

Par conséquent, on peut maintenant supposer que $M = \mathrm{diag}(m_1, m_2, 0, \ldots, 0)$ avec m_1 et m_2 de signes opposés ou nuls. Si l'un d'entre eux, mettons m_2, est nul, alors on a $m_1 p_{11} > 0$ par (1) pour $i = 2$ et $m_1 p_{11} \leq 0$ par (1) pour $i = 1$ en choisissant a_j suffisamment petit pour $j \geq 2$. C'est une contradiction.

On a donc $m_1 = \lambda > 0$ et $m_2 = -\mu < 0$. Par (2), on a aussi $p_{jj} = 0$ pour tout $j \geq 3$. Par (1), on obtient aussi $m_1 p_{11} = m_2 p_{22} > 0$, et donc $p_{11} = \mu p > 0$ et

$p_{22} = -\lambda p < 0$ pour un réel strictement positif p. Cela nous permet de réécrire notre symétrie linéaire sous la forme

$$\sigma(A) = A - \frac{\mathrm{tr}(AP)}{\lambda\mu p}\mathrm{diag}(\lambda, -\mu, 0, \ldots, 0). \tag{3}$$

Les matrices A de la forme (a_{ij}) avec $a_{ij} = 0$ pour $i \geq 3$, j quelconque et pour $j \geq 3$, i quelconque et avec $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ définie positive sont dans la clôture de l'ensemble des matrices définies positives. De ce fait, et par (3) σ, qui est linéaire donc continue, préserve ce type de matrices. On exploite ce fait en notant que l'application induite $\sigma_2 : A \in S_2(\mathbb{R}) \to A - \frac{\mathrm{tr}(AP)}{\lambda\mu p}\mathrm{diag}(\lambda, -\mu) \in S_2(\mathbb{R})$ préserve l'ensemble $\mathrm{Pos}_2(\mathbb{R})$. En particulier, elle préserve son bord, c'est à dire l'ensemble des matrices deux-deux à trace positive et à déterminant nul. Ainsi, pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, l'application σ_2 transforme la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b^2/a \end{pmatrix}$$

en une autre matrice de trace positive et de déterminant nul. En particulier,

$$0 = \left(\frac{b^2\lambda}{a\mu} - \frac{2bp_{12}}{\mu p}\right)\left(\frac{a\mu}{\lambda} + \frac{2bp_{12}}{\lambda p}\right) - b^2$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En fixant $b \neq 0$ et en faisant tendre a vers O^+, on voit ainsi que $p_{12} = 0$.

Pour $n = 2$, il est temps de procéder à la synthèse : tout choix de réels strictement positifs λ, μ définit bien une symétrie linéaire

$$\sigma_{\lambda,\mu} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} a_{22}\frac{\lambda}{\mu} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11}\frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$$

qui préserve l'ensemble des matrices définies positives.

Supposons maintenant $n \geq 3$. On teste σ sur les matrices de la forme (a_{ij}) avec

$$a_{22} = 1, a_{33} = a > 0, a_{23} = b$$

avec $a > b^2$, et tous les autres a_{ij} nuls. L'image d'un telle matrice a le nombre réel $-\frac{\mathrm{tr}(AP)}{\mu p}$ comme valeur propre, et comme σ préserve la clôture de l'ensemble des matrices définies positives, on en déduit $\mathrm{tr}(AP) \leq 0$. D'où $2p_{23}b \leq \lambda p$ pour tous $\sqrt{a} > b$. Quitte à choisir a et $|b|$ assez grand, on obtient que $p_{23} = 0$.

On montre de la même façon que $p_{13} = 0$.

On teste enfin σ sur les matrices de la forme (a_{ij}) avec a_{ij} nul si $i \geq 4$, j quelconque et si $j \geq 4$, i quelconque. De nouveau, on a une application induite sur $S_3(\mathbb{R})$ préservant l'ensemble $\mathrm{Pos}_3(\mathbb{R})$. Explicitement, on a

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} a_{22}\frac{\lambda}{\mu} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11}\frac{\mu}{\lambda} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$$

En évaluant σ_3 sur les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient que $\lambda = \mu$. Finalement, on évalue sur :

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui envoie une matrice définie positive sur une matrice non-définie positive, une absurdité. Il n'y a donc pas de telles symétries pour $n \geq 3$. □

Démonstration alternative de la non-existence pour $n \geq 3$, due à Armand. On prouve tout d'abord que σ préserve l'ensemble des matrices de la forme $v\,{}^t v$ pour $v \in \mathbb{R}^n$. En effet, il s'agit précisément de l'ensemble des matrices symétriques de rang 1 et d'unique valeur propre non nulle strictement positive, que l'on peut aussi voir comme l'ensemble des rayons extrémaux du cône fermé $\overline{\mathrm{Pos}}_n(\mathbb{R})$ préservé par σ.

Notons également qu'une matrice symétrique de rang 1 dans l'adhérence du cône des matrices définies positives a exactement deux représentations de la forme $v\,{}^t v$, données par v et son opposé $-v$: en effet, les colonnes fixent v à homothétie réelle près de carré 1.

On en déduit que σ induit une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donnée par

$$f(v)\,{}^t f(v) = \sigma(v\,{}^t v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

(La continuité est posée ici pour induire un choix de signe global et uniforme.) Comme σ est involutive, on a également que $f^2 = \mathrm{id}$. La fonction f commute aux homothéties réelles. On peut montrer que f est en fait linéaire (à justifier). Soit F la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: on a $F^2 = I_n$ et

$$\sigma(A) = FA\,{}^t F \quad \forall A \in S_n(\mathbb{R})$$

par le théorème spectral (qui permet de décomposer A en une combinaison linéaire de matrices de la forme $v\,{}^t v$ à coefficients réels).

Comme F annule un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, elle est diagonalisable de valeurs propres 1 et -1 (avec multiplicité p et q telles que $p + q = n$). La relation entre σ et f sur les matrices de rang 1 permet de voir que le sous-espace vectoriel fixe de σ a pour dimension $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}$. C'est un hyperplan si et seulement si cette dimension est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire si $p^2 + q^2 = n^2$. En utilisant aussi que $p + q = n$, on aboutit à la condition

$$(p = q = 1 \text{ et } n = 2) \text{ ou } (pq = 0 \text{ et } n = 1).$$

□

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $E = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Soient $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables alétoires indépendantes de loi uniforme à valeur dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On définit une opération $*$ sur E par

$$e_i * e_j = e_{\sigma_i(j)}.$$

Montrer que la probabilité que $(E, *)$ soit un groupe, sachant qu'il possède un élément neutre, tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Démonstration, version 1. Comme la question est asymptotique, on pose $n \geq 2$. Si la structure algébrique $(E, *)$ possède un élément neutre, alors cet élément neutre doit être unique : deux éléments neutres $e, e' \in E$ satisferaient en effet $e = e * e' = e'$. Ainsi, pour $i \neq j$, on a

$$\mathbf{P}(e_i \text{ et } e_j \text{ sont des éléments neutres dans } E) = 0.$$

Cela permet de simplifier la formule des probabilités totales pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left((E,*) \text{ a un élément neutre}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(e_i \text{ est élément neutre de } (E,*)\right) \\ &= n\mathbf{P}(e_1 \text{ est élément neutre de } (E,*)),\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les σ_i suivent la même loi pour la deuxième égalité. On note que e_1 est un élément neutre de $(E, *)$ si et seulement si σ_1 est l'identité et pour tout $i \neq 1$, $\sigma_i(1) = i$. Comme les σ_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\mathbf{P}(e_1 \text{ est élément neutre de } (E,*)) = \frac{1}{n! n^{n-1}}.$$

Ainsi, la probabilité que $(E, *)$ possède un élément neutre est

$$\frac{1}{n! n^{n-2}}.$$

En général, on va utiliser un résultat de cours sur l'ordre : tout élément d'un groupe d'ordre n a ordre fini $d \mid n$. (Note : ne pas laisser le ou la candidate utiliser le lemme de Cauchy, qui est hors-programme). Ainsi, on peut majorer :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((E,*) \text{ groupe}) &= n\,\mathbf{P}((E,*) \text{ groupe et } e_1 \text{ neutre}) \\ &\leq n\,\mathbf{P}(\sigma_1 = \mathrm{id} \text{ et } \forall i \neq 1\, \sigma_i(1) = i \text{ et } \mathrm{ord}(\sigma_i) \mid n) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\, p_n^{n-1},\end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance et la loi uniforme des σ_i à la dernière ligne, et où l'on note

$$p_n = \mathbf{P}(\sigma(1) = 2 \text{ et } \mathrm{ord}(\sigma) \text{ divise strictement } n).$$

pour σ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On majore maintenant p_n. On considère la variable aléatoire d_σ à valeurs dans $[\![1, n!]\!]$ qui compte le cardinal de l'orbite de 1 par σ. On note que d_σ divise l'ordre de σ, et donc

$$\begin{aligned}
p_n &\leq \mathbf{P}(\sigma(1) = 2 \text{ et } d_\sigma \in [\![2, n]\!] \text{ divise } n) \\
&= \sum_{\substack{2 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \mathbf{P}(\sigma(1) = 2 \text{ et } d_\sigma = d) \\
&\leq \sum_{\substack{2 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \frac{(n-d)! \prod_{1 \leq i \leq d-2} (n-d+i)}{n!} \\
&= \frac{|\{d \in [\![2, n]\!], d \mid n\}|}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Si l'on décompose n en produit de nombres premiers $\prod_{j=1}^r p_j^{a_j}$, on note que

$$\frac{|\{d \in [\![2, n]\!], d \mid n\}|}{n} = \left(\prod_{j=1}^r \frac{a_j + 1}{p_j^{a_j}} \right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2},$$

ce qu'on peut voir par exemple en notant que tous les facteurs du produit ci-dessus sont inférieurs ou égaux à 1, et (pour une estimation plus fine) que pour $x \geq 2$ fixé, la fonction $a \in [1, +\infty[\mapsto \frac{a+1}{x^a}$ est strictement décroissante (prendre le logarithme, dériver, et finalement noter que $\ln(2) > \frac{1}{2}$), et a donc pour valeur maximale $\frac{2}{x}$. Cela prouve notamment l'inégalité voulue si n a un facteur premier supérieur ou égal à 5, et si 8 ou 9 divisent n. Il reste les petits cas où n divise 12, qui se traitent facilement à la main. (Notons qu'on peut aussi travailler moins précisément et dominer par une autre constante strictement inférieure à 1, par exemple $\frac{3}{4}$, afin d'avoir moins de petits cas à traiter à la main.)

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((E, *) \text{ groupe} \mid (E, *) \text{ a un élément neutre}) &\leq \frac{n! \, n^{n-2}}{(n-1)! \, (2n-2)^{n-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

qui tend bien vers zéro quand n tend vers l'infini. □

Démonstration, version 2 due à Armand. Pour $n \geq 3$, la probabilité $\mathbf{P}((E, *)$ groupe $\mid$ $(E, *)$ a un élément neutre) est inférieure ou égale à

$$n \cdot \mathbf{P}((e_1 * e_2) * e_j = e_1 * (e_2 * e_j) \, \forall 1 \leq j \leq n \mid e_n \text{ est élément neutre}).$$

L'événement $(e_1 * e_2) * e_j = e_1 * (e_2 * e_j)$ pour tout j se réécrit par ailleurs comme

$$\sigma_{\sigma_1(2)} = \sigma_1 \circ \sigma_2.$$

Il suffit donc de montrer que la probabilité suivante est négligeable devant $\frac{1}{n}$:

$$p_n := \mathbf{P}(\sigma_{\sigma_1(2)} = \sigma_1 \circ \sigma_2 \mid \sigma_n = \text{id et } \forall\, i,\, \sigma_i(n) = i).$$

Considérons déjà la probabilité suivante :

$$\mathbf{P}(\sigma_1(2) = n \text{ et } \sigma_1 \circ \sigma_2 = \text{id} \mid \sigma_n = \text{id et } \forall\, i,\, \sigma_i(n) = i).$$

On la majore par indépendance par la probabilité

$$\mathbf{P}(\sigma_1 \circ \sigma_2 = \mathrm{id} \mid \sigma_1(n) = 1 \text{ et } \sigma_2(n) = 2) \leq \frac{n^2(n-2)!}{(n!)^2} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par la formule des probabilités totales et comme les σ_i sont indépendantes et de même loi, on obtient que pour $n \geq 4$,

$$p_n = (n-1) \cdot \mathbf{P}(\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \mid \forall\, i \in [\![1, 3]\!],\, \sigma_i(n) = i) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et l'on montre sans trop de peine par un comptage d'issues favorables parmi les issues possibles que la probabilité

$$\mathbf{P}(\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \mid \forall\, i \in [\![1, 3]\!],\, \sigma_i(n) = i)$$

est elle-même négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, ce qui conclut. $\square$

Exercice 4. (Structures réelles sur $\mathbb{CP}^{n-1}$) Soit $R_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices A telles que $A\overline{A}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{C} \cdot I_n$ des homothéties. On définit sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et en particulier sur R_n la relation d'équivalence suivante :

$$A \sim B \text{ s'il existe } M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ H \in \mathbb{C}^* \cdot I_n \text{ telles que } A = \overline{M}BM^{-1}H.$$

Donner une liste d'éléments de R_n comprenant un (et exactement un) représentant par classe d'équivalence de $\sim$.

Démonstration. Soit $A \in R_n$. On écrit $A\overline{A} = \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons déjà que λ est réel et non-nul : en effet, comme A est inversible, $\overline{A}$ est aussi inversible, et donc λ est non-nul. Comme $\overline{A} = \lambda A^{-1}$, on a aussi que

$$\lambda I_n = \overline{A}A = \overline{A\overline{A}} = \overline{\lambda} I_n,$$

et donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note que les matrices A et $B = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A$ sont équivalentes par $\sim$ et que de plus,

$$B\overline{B} = \varepsilon(\lambda) I_n,$$

où $\varepsilon(\lambda)$ désigne le signe du nombre réel λ. Notons aussi que $\lambda^n = |\det A|^2 > 0$: si n est impair, cela implique que λ est strictement positif.

Supposons pour commencer que $B\overline{B} = I_n$. On va montrer qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = \overline{M}M^{-1}$, et obtenir en particulier que $B \sim I_n$. Pour une matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$M_C = \overline{C} + \overline{B}C.$$

Notons qu'on a automatiquement $BM_C = \overline{M_C}$. S'il existe C telle que M_C est inversible, on a fini. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $-e^{-2i\theta}$ n'est pas une valeur propre de B : si on pose $C = e^{i\theta} I_n$, on obtient $M_C = e^{i\theta}(\overline{B} + e^{-2i\theta} I_n)$, donc M_C est bien inversible.

Supposons maintenant que $B\overline{B} = -I_n$. Notons que pour cela, n doit être pair et posons $n = 2k$. Notons que la matrice J diagonale par blocs de taille 2×2 tous de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfait $J = \overline{J}$ et $J^2 = -I_n$. En particulier, on a $B\overline{B} = J\overline{J} = -I_n$. On va montrer qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = \overline{M}JM^{-1},$$

et obtenir en particulier que $B \sim J$. Pour une matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$M_C = \overline{C}J + \overline{B}C.$$

Notons qu'on a automatiquement $BM_C = \overline{M_C}J$. S'il existe C telle que M_C est inversible, on a de nouveau fini. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $e^{-2i\theta}$ n'est pas une valeur propre de BJ : si on pose $C = e^{i\theta} I_n$, on a $M_C = -e^{i\theta}(\overline{B}J - e^{-2i\theta} I_n)J$, donc M_C est bien inversible.

Finalement, on a montré que

— pour n impair, toutes les matrices contenues dans R_n sont $\sim$-équivalentes ;

— pour n pair, il y a au plus deux $\sim$-classes d'équivalences dans R_n : celle de I_n et celle de J. Ces deux classes sont en fait disjointes : par l'absurde $J \sim I_n$ permet d'écrire $J = \overline{M}M^{-1}H$ et donc

$$-I_n = J\overline{J} = H\overline{H} = |h|^2 I_n,$$

où on a $H = hI_n$ avec $h \in \mathbb{C}^*$, ce qui est absurde. Donc I_n et J représentent les deux classes d'équivalences de $\sim$ dans R_n.

$\square$

Ébauche d'une étape de démonstration alternative, due à Armand. Soit B une matrice telle que $B\overline{B} = I_n$. Pour montrer que B peut s'écrire sous la forme $\overline{M}M^{-1}$, on peut aussi procéder de la façon suivante : on écrit $B = \exp(L)$ (à justifier). On a alors $L + \overline{L} = 0$. Le choix de $M = \exp(-L/2)$ convient alors. $\square$