Übungsblatt $9 + \frac{1}{2}$: Sonderausgabe

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 1. Sei k ein Körper. Wir betrachten den Ring $R := k[x, y]/(x, y)^2$.

1) Welche sind die invertierbare Elemente in R?
2) Bestimmen Sie alle Hauptidealen von R.
3) Bestimmen Sie alle Idealen von R.

Übung 2. Sei R ein Integritätsring, in dem jedes echte Ideal endlich ist. Beweisen Sie, dass R ein Körper ist.

Übung 3. Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ein Primideal $\mathfrak{p}_0 \subsetneq R$ enthält, das für die Inklusion unter Primidealen von R minimal ist.

Übung 4. Sei R ein Integritätsring und M ein R-Modul. Ist die Teilmenge

$$\{m \in M \mid \exists r \in R,\, r \neq 0 \text{ und } rm = 0\}$$

ein Untermodul von M? Was passiert, wenn R kein Integritätsring mehr ist?

Übung 5. In $\mathbb{C}[X, Y]$ wird die folgende Teilmenge definiert:

$$A := \{P \in \mathbb{C}[X, Y] \mid P(0, Y) \in \mathbb{C}[Y] \text{ ist konstant}\}.$$

Beweisen Sie, dass A eine $\mathbb{C}[X, Y]$-Algebra ist. Ist der Ring A noethersch? faktoriell? ein Hauptidealring?

Übung 6. Sei I eine Menge und $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie das R-Modul $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(R^n, R^{(I)})$.

Übung 7. Seien R und S Ringe mit einem Ringhomomorphismus $f : R \to S$. Sei M ein R-Modul, P ein S-Modul, und N eine Menge die über sowohl eine R- also auch eine S-Modulstruktur verfügt, mit

$$r \cdot (s \cdot n) = s \cdot (r \cdot n).$$

Zu merken ist, dass die zwei Modulstrukturen auf N nicht unbedingt mit der Abbildung f kompatibel sind. Beweisen Sie, dass die folgenden zwei S-Moduln kanonisch isomorph sind:

$$(M \underset{R}{\otimes} N) \underset{S}{\otimes} P \cong M \underset{R}{\otimes} (N \underset{S}{\otimes} P)$$