Übungsblatt 8: Tensorprodukt

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 8.1. (wird benotet, auf 5 Punkten) Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Sei I ein Ideal von R. Beweisen Sie, dass die R-Moduln $M \otimes_R R/I$ und M/IM kanonisch isomorph sind. Was heißt das insbesondere wenn $I = \operatorname{Ann}(M)$?

Übung 8.2. (Eine Basis aus atomaren Tensoren)

1) Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass die R-lineare Abbildung induziert durch

$$g : e_{(i,j)} \in R^{(I \times J)} \mapsto e_i \otimes e_j \in R^{(I)} \otimes_R R^{(J)}$$

ein R-Modulisomorphismus ist.

2) Sei k ein Körper und seien V, W zwei k-Vektorräume mit Basen $\{v_i\}_{i \in I}$ beziehungsweise $\{w_j\}_{j \in J}$. Beweisen Sie, dass die Menge der atomaren Tensoren $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ eine Basis für das Tensorprodukt $V \otimes_k W$ ist.

Anmerkung. Das Auswahlaxiom impliziert eigentlich, dass jeder k-Vektorraum eine Basis hat: Dass die zwei k-Vektorräume V und W über Basen verfügen gilt also immer.

Übung 8.3. Sei k ein Körper. Seien V und W zwei k-Vektorräume.

1) Beweisen Sie, dass es eine einzige k-lineare Abbildung

$$\varphi : V^\vee \otimes_k W \to \operatorname{Hom}_k(V, W)$$

gibt, die auf atomare Tensoren durch $\varphi(f \otimes w) := (v \in V \mapsto f(v)\, w \in W)$ gegeben ist.

2) Prüfen Sie, dass φ injektiv ist. Beweisen Sie, dass das Bild von φ dem folgenden Untervektorraum entspricht:

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{g \in \operatorname{Hom}_k(V, W) \mid \dim g(V) < +\infty\},$$

wobei $g(V)$ als Untervektorraum von W, also als k-Vektorraum betrachtet wird. Wann ist φ bijektiv?

3) Jetzt nehmen wir an, dass W endlicher Dimension ist. Sei $g \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$. Beweisen Sie, dass

$$\dim g(V) = \min\left\{ r \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists (f_1, \ldots, f_r) \in (V^\vee)^r, \exists (w_1, \ldots, w_r) \in W^r \text{ sodass } \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} f_i \otimes w_i\right) = g \right\}.$$

Deduzieren Sie, dass jedes Element von $V \otimes_k W$ sich als Summe von höchstens $\dim W$ atomare Tensoren schreiben lässt, wenn V endlicher Dimension ist.

4) Jetzt dürfen W und V wieder unedlicher Dimension sein. Gibt es eine ganze Zahl r, sodass jedes Element von $V \otimes_k W$ sich als Summe von höchstens r atomaren Tensoren schreiben lässt?

Übung 8.4. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathbb{Z}$-Algebren beziehungsweise R-Algebren:

1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n, m)\mathbb{Z}$ für alle $n, m \geq 1$.
2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{0\}$.
3) $R[x] \otimes_R R[y] \cong R[x, y]$, für jeden Ring R.
4) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \neq \{0\}$.
5) $k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = k$, für jeden Körper k, der $\mathbb{Q}$ enthält.