Übungsblatt 7: p-adische Zahlen, projektiver Limes

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 7.1. (wird benotet, auf 3 Punkten) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Beweisen Sie, dass die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ über die folgende Eigenschaft verfügt: Für jede Menge Y ist die folgende Abbildung eine Bijektion :

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i, Y\right) \quad \mapsto \quad (f \circ \iota_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X_i, Y),$$

wobei ι_i die Inklusion von X_i in die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

Umformulierung. Die disjunkte Vereinigung entspricht also dem Koprodukt in der Kategorie **Set**.

Übung 7.2. (wird benotet, auf 2 Punkten) Sei $I = \{1, 2, 3, 4\}$ halbgeordnet durch Teilbarkeit. Betrachten Sie das folgende projektive System von R-Moduln:

$$\begin{array}{ccc} M_4 = M & \xrightarrow{f} & M_2 = N \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_N} \\ M_3 = M & \xrightarrow[g]{} & M_1 = N \end{array}$$

Berechnen Sie den projektiven Limes $\varprojlim_{i\in I} M_i$.

Übung 7.3. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen Zahlen ein Hauptidealring ist. Beweisen Sie zudem, dass die Idealen von $\mathbb{Z}_p$ der folgenden Form sind:

$$(0),\ \mathbb{Z}_p,\ \iota(p^k)\mathbb{Z}_p \text{ für } k \geq 1,$$

wobei ι die Einbettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ bezeichnet.

Übung 7.4. Sei $(\mathbb{N}, |\,)$ die Menge der positiven ganzen Zahlen, halbgeordnet durch Teilbarkeit. Sei $\hat{\mathbb{Z}}$ der projektive Limes des projektiven Systems $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ mit Ringhomomorphismen $f_{nm} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ wenn $m \mid n$. Beweisen Sie, dass

$$\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}_p,$$

wobei $\mathbb{Z}_p$ den Ring der p-adischen Zahlen bezeichnet.

Erinnerung. Hier ist $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.