Übungsblatt 6: Produkt und Koprodukt

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 6.1. (wird benotet, auf 5 Punkten) Sei R ein Ring, sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass das Koproduktmodul $R^{(\mathbb{N}^n)}$ und das Polynommodul $R[X_1, \ldots, X_n]$ als R-Moduln isomorph sind. Sind sie auch als Ringe isomorph?

Übung 6.2. (Richtung Tensorprodukt) Seien M und N zwei $\mathbb{Z}$-Moduln. Sei $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ die direkte Summe von $\mathbb{Z}$ über die Indexmenge $M \times N$, worin wir die Eins in dem Summand mit Index (m, n) als $e_{(m,n)}$ bezeichnen. sei $K \subset \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ das von den folgenden Elementen erzeugte Untermodul:

$$\{e_{(m_1+m_2,n)} - e_{(m_1,n)} - e_{(m_2,n)} \mid m_1, m_2 \in M, n \in N\} \cup \{e_{(m,n_1+n_2)} - e_{(m,n_1)} - e_{(m,n_2)} \mid m \in M, n_1, n_2 \in N\}.$$

Sei $T = \mathbb{Z}^{(M\times N)}/K$ der Faktormodul. Konstruieren Sie eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $f : M \times N \to T$, wodurch jede $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $M \times N \to P$ faktorisiert.

Hinweis. Für drei R-Moduln M, N, T heißt eine Abbildung $f : M \times N \to T$ *R-bilinear* wenn die Abbildungen $f(m, \cdot) : N \to T$ für jedes $m \in M$ und $f(\cdot, n) : M \to T$ für jedes $n \in N$ alle R-linear sind.

Übung 6.3. Sei R ein Ring und sei N ein R-Modul.
Die *Spur* $\mathrm{tr}_N(M)$ von N in einem R-Modul M ist durch

$$\mathrm{tr}_N(M) := \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(N,M)} \mathrm{Im}(\varphi)$$

definiert.

1) Beweisen Sie, dass es ein R-lineares Homomorphismus $\psi : N^{(I)} \to M$ gibt, sodass $\mathrm{tr}_N(M) = \mathrm{Im}(\psi)$ gilt.
2) Beweisen Sie, dass $M \mapsto \mathrm{tr}_N(M)$ ein Funktor von der Kategorie $R - \mathrm{Mod}$ auf sich selbst ist.

Übung 6.4. Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Sei $m \in M$. Beweisen Sie die Äquivalenz der zwei folgenden Aussagen:

1) $\mathrm{Ann}(mR) = (0)$ und es gibt ein Untermodul $F \subset M$, sodass $M = F + mR$ und F und mR in direkter Summe sind.
2) es gibt $f \in \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(M, R)$ mit $f(m) = 1_R$.

Beweisen zudem, dass 1) und 2) die Zerlegung $M = \ker(f) \oplus mR$ implizieren.

Erinnerung. Mit mR wird das von m erzeugte Untermodul bezeichnet.