Übungsblatt 5: Moduln

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 5.1. (Dualität) Sei R ein Ring. Für jeden R-Modul M definieren wir den dualen Modul

$$M^\vee = \mathrm{Hom}(M, R),$$

wobei Hom für die R-linearen Homomorphismen steht. Beweisen Sie, dass M und $M^{\vee\vee}$ als R-Moduln kanonisch isomorph sind, wenn $M = R^d$, wobei $d \geq 0$.

Übung 5.2. (wird benotet, aud 5 Punkten) Sei k ein Körper. Sei R der Ring $k[x,y]/(y^3 - x^2)$. Das injektive Ringhomomorphismus

$$R = k[x,y]/(y^3 - x^2) \hookrightarrow k[t],$$

welches x auf t^3 und y auf t^2 abbildet, induziert eine R-Modulstruktur auf $M = k[t]$. Sei I das von (der Abbildung von) x erzeugte Ideal in R. Berechnen Sie $\mathrm{Ann}(M/IM)$.

Übung 5.3. Sei R ein Ring und es sei das folgende kommutative Diagram von R-Moduln:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ N_1 \arrow[r, "\nu"] & N_2 \end{tikzcd}$$

Beweisen Sie, dass es eindeutige R-Modulhomomorphismen

$$f_{\ker} : \ker(\mu) \to \ker\nu \quad \text{und} \quad f_{\mathrm{co}} : \mathrm{coker}(\mu) \to \mathrm{coker}(\nu)$$

gibt, sodass das folgende erweiterte Diagram auch kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \ker(\mu) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\ker}"'] & M_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \mathrm{coker}(\mu) \arrow[d, "f_{\mathrm{co}}"] \\ \ker(\nu) \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\nu"] & N_2 \arrow[r] & \mathrm{coker}(\nu) \end{tikzcd}$$

Übung 5.4. Welche endliche kommutative Gruppen verfügen über eine $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$-Modul Struktur?

Hinweis. Der folgende Fakt kann ohne Beweis angewandt sein: Für p eine Primzahl gilt $\exists\, n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, sodass $n^2 \equiv 5$ genau so dann, wenn $p = 2$, 5, oder $p \equiv 1 \,\text{oder}\, 4 \bmod 5$.