Übungsblatt 4: Radikalen; euklidischer Ring und Hauptidealring

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 4.1. (wird benotet, auf 2 Punkten) Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Beweisen Sie, dass I genau so dann ein Radikalideal ist, wenn der Faktorraum R/I kein nicht-nulles nilpotentes Element hat.

Übung 4.2. Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass das Jacobsonradikal von R der folgenden Teilmenge entspricht:

$$\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R \mid \forall a \in R,\ 1 - ax \text{ ist eine Einheit von } R\}.$$

Übung 4.3. Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Beweisen Sie, dass

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in S_I} \mathfrak{p}$$

gilt, wobei $S_I = \{\mathfrak{p} \subsetneq R \mid I \subset \mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{p} \text{ ist eine Primideal von } R\}$.

Übung 4.4. (wird benotet, auf 3 Punkten) Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

1) der Polynomring $R[X]$ ist ein Hauptidealring;
2) R ist ein Körper.

Übung 4.5. Sei j eine primitive dritte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$.

1) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[j]$ ein euklidischer Ring ist. Ist der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ euklidisch?
2) Bestimmen Sie alle ganzzählige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$.