Übungsblatt 12: Lokalisierung, ganze Elemente, und ausgewählte Themen

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins. Keine Übung wird benotet. Nach Wunsch dürfen aber Übungen bis zum 14.07 zur Korrektur abgegeben werden. Die Ordnung ist thematisch und entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht.

Übung 12.1. Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul, dass über eine abzählbare erzeugende Familie verfügt.

1) Nehmen Sie an, dass $R = k$ ein Körper ist. Beweisen Sie dann, dass M entweder endlich erzeugt, oder isomorph zu dem freien k-Vektorraum $k^{(\mathbb{N})}$ ist.
2) Konstruieren Sie einen Gegenbeispiel zu der Aussage 1) für Ringe; das heißt ein Ring R und ein abzählbar erzeugtes R-Modul, dass weder endlich erzeugt, noch isomorph zu dem freien R-Modul $R^{(\mathbb{N})}$ ist.

Übung 12.2. Sei R ein noetherscher und lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Beweisen Sie dass **genau eine** der folgenden zwei Aussagen gilt:

A) es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n = 0$ und R ist artinsch;

B) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$.

Hinweis. Aus der Vorlesung kann der folgende Satz verwendt werden: Ein Ring ist genau so dann artinsch, wenn er noethersch ist und nulle Krulldimension hat.

Übung 12.3. Sei R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Beweisen Sie, dass

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \text{ ist flach} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I,\ M_i \text{ ist flach.}$$

Übung 12.4. Sei R ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und M ein R-Modul. Beweisen Sie die folgende Inklusion:

$$S^{-1}\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(S^{-1}(M)).$$

Beweisen Sie zudem, dass die umgekehrte Inklusion auch gilt, wenn M als R-Modul endlich erzeugt ist.

Übung 12.5. (ab den 12.07 zu betrachten) Sei R ein Ring und $A \subseteq R$ ein Unterring. Nehmen Sie an, dass R über A ganz ist. Beweisen Sie die folgenden zwei Aussagen:

1) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ ist der Ring R/I ganz über sein Unterring $(A \cap I)/I$.
2) Für jede multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subset A$ ist der Ring der Brüchen $S^{-1}R$ ganz über $S^{-1}A$.