Übungsblatt 10: Noethersche und artinsche Moduln, Lemma von Nakayama

In den folgenden Übungen sind alle Ringe kommutativ mit Eins.

Übung 10.1. (wird benotet, auf 5 Punkten) Sei R ein lokaler Ring und M, N zwei endlich erzeugte R-Moduln. Nehmen Sie an, dass $M \underset{R}{\otimes} N = \{0\}$. Beweisen Sie, dass M oder N null ist.

Übung 10.2. Seien R ein Ring und M ein noetherscher R-Modul. Beweisen Sie, dass $R/\mathrm{Ann}(M)$ ein noetherscher Ring ist.

Übung 10.3. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

1) M ist ein noetherscher R-Modul;
2) $M[X]$ ist ein noetherscher $R[X]$-Modul.

Übung 10.4. Sei R ein Ring. Sei M ein R-Modul und $N \subset M$ ein R-Untermodul. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

1) M ist ein artinscher R-Modul;
2) N und M/N sind beide artinsche R-Moduln.