

Chemins auto-évitants : autour de la constante de connectivité

Cécile Gachet

19 octobre 2016

Résumé

Imaginez que vous vous promenez dans une ville dont le plan est un quadrillage régulier, en vous interdisant de passer plus d'une fois à chacun des carrefours. Combien de chemins pourrez-vous décrire ? A quoi ressembleront-ils ?

On s'intéresse ici à l'ensemble \mathcal{C}_n des chemins auto-évitants de n pas sur des graphes particuliers, à n fixé. On se penche tout d'abord sur les petits cas, puis on caractérise le comportement asymptotique de $|\mathcal{C}_n|$ par une constante μ dépendant du graphe étudié. On reprend enfin un exemple de W. Werner ([5]) et un résultat de H. Duminil-Copin et S. Smirnov ([1]), donnant la valeur de μ pour deux graphes spécifiques.

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Préliminaires	2
1.2	Un peu de dénombrement	2
1.3	Définition de la constante de connectivité	3
2	Étude élémentaire de la constante de connectivité	3
2.1	Encadrement grossier pour le réseau carré	3
2.2	Vers un encadrement plus fin	4
2.3	Détermination de μ sur le réseau en échelle	4
3	Vers des méthodes plus systématiques : détermination de μ sur le réseau hexagonal	4
3.1	Définition de l'observable parafermionique	5
3.2	Équation au bord d'un domaine en bande	6
3.3	Majorer, minorer, conclure	7

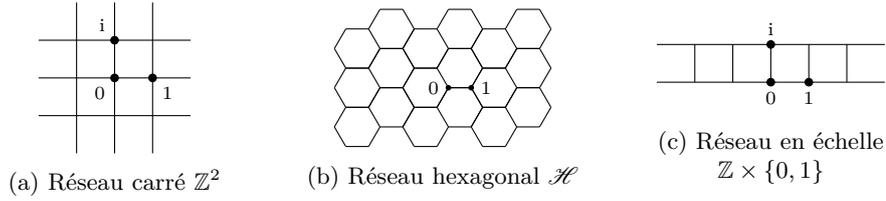


FIGURE 1 – Des réseaux utiles par la suite.

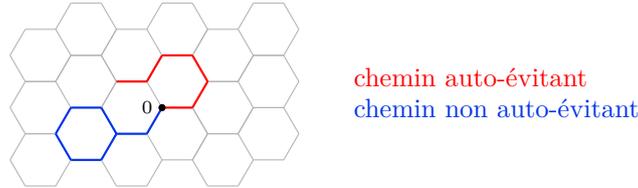


FIGURE 2 – Chemins sur le réseau hexagonal.

1 Généralités

1.1 Préliminaires

Contexte On étudie des chemins auto-évitants sur un graphe infini régulier (*ie* connexe et transitif sous l'action du groupe de ses automorphismes) qu'on peut plonger dans le plan complexe. On appelle ici un *réseau (plan)* un tel graphe plongé dans \mathbb{C} . Deux sommets du réseau sont dit *consécutifs* s'ils sont reliés par une arête.

Remarque 1 Cette notion est plus générale que la définition usuelle d'un réseau de \mathbb{R}^2 . En particulier, elle permet de définir le réseau hexagonal, représenté en figure 1.

Définition d'un chemin par ses sommets Un *chemin* est la donnée d'une suite finie de sommets du réseau, $(s_k)_{k \in [0, n]}$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, s_k et s_{k+1} sont consécutifs.

La *longueur* d'un chemin $\gamma = (s_k)_{k \in [0, n]}$ est l'entier n . Elle est notée $l(\gamma)$. Est dit *trivial* tout chemin de longueur nulle.

Définition d'un chemin par ses pas À tout chemin non trivial $\gamma = (s_k)_{k \in [0, n]}$, on associe la suite de *pas* $(s_{k+1} - s_k)_{k \in [0, n-1]}$. On associe ainsi à tout chemin de longueur n une suite de n pas et cette suite détermine le chemin à automorphisme du réseau près.

Remarque 2 Toute suite de pas ne définit pas un chemin : sur le réseau hexagonal, on peut considérer la suite $(1, 1)$.

De façon cumulative avec les définitions présentes, un *chemin* est dit *auto-évitant* si les sommets qui le définissent sont deux à deux distincts. Un exemple de chemin auto-évitant est donné en figure 2.

1.2 Un peu de dénombrement

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{C}_n l'ensemble des chemins auto-évitants partant de l'origine de longueur n , c_n le cardinal de cet ensemble, et \mathcal{C} l'ensemble des chemins auto-évitants. On peut aisément calculer à la main les petites valeurs de c_n sur un réseau donné.

Exemple 3 Sur le réseau carré, $c_0 = 1$, $c_1 = 4$. Le chemin associé à la suite de pas (p_1, p_2) est auto-évitant si et seulement si il ne revient pas sur lui-même, donc il y a 4 possibilités pour p_1 et 3 possibilités pour p_2 en excluant $-p_1$. Donc $c_2 = 4 \cdot 3$. De même, $c_3 = 4 \cdot 3^2$, mais $c_4 = 4 \cdot 3^3 - 8$, car parmi les chemins de longueur 4 qui ne reviennent pas sur eux-mêmes, les 8 chemins qui bouclent ne sont pas auto-évitants.

Un algorithme naïf de coût exponentiel permet d'obtenir les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	1	4	12	36	100	284	780	2172	5916	16268	44100

Toutefois, cette méthode ne permet pas de calculer c_n pour $n \geq 20$ en un temps raisonnable. Il faut alors recourir à des algorithmes non déterministes, qui permettent d'estimer c_n pour n plus grand, mais dont la précision est mal connue. On peut se reporter à l'algorithme présenté dans [2], qui a permis de générer le chemin auto-évitant de 1000 pas représenté en page de garde.

1.3 Définition de la constante de connectivité

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de c_n sur un réseau donné.

PROPOSITION 1 *On définit à bon droit $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$, la constante de connectivité du réseau.*

Pour montrer l'existence de cette limite, on utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 2 *Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a :*

$$c_{n+m} \leq c_n c_m.$$

LEMME 3 (dit de Fekete) *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. La suite $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers sa borne inférieure.*

Preuve du lemme 2 Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On construit l'injection :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}_{n+m} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_m \\ (s_k)_{k \in [0, n+m]} & \longmapsto & ((s_k)_{k \in [0, n]}, (s_{n+k} - s_n)_{k \in [0, m]}). \end{cases}$$

□

La démonstration du lemme 3 est un exercice classique, laissé au lecteur.

Preuve de la proposition 1 D'après le lemme 2, on peut appliquer le lemme 3 à $(\ln c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc $(\sqrt[n]{c_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. □

Remarque 4 Ce résultat est vrai pour tout réseau, mais la valeur de μ dépend du réseau choisi. On se propose dans la suite de l'étudier sur les différents réseaux représentés en figure 1.

Remarque 5 On n'a pas obtenu d'équivalent de c_n , mais un renseignement sur le facteur exponentiel d'un éventuel équivalent. À ce sujet, l'article [1] donne la conjecture suivante, pour tout réseau plan :

$$c_n \sim An^{11/32} \mu^n.$$

2 Étude élémentaire de la constante de connectivité

2.1 Encadrement grossier pour le réseau carré

Sur le réseau carré, on a établi précédemment que $0 < \mu \leq 4$. Toutefois, un argument combinatoire analogue à la preuve du lemme 2 permet d'obtenir un meilleur encadrement.

PROPOSITION 4 *Sur le réseau carré, on a :*

$$2 \leq \mu \leq 3.$$

Preuve Comme dit dans l'exemple 3, un chemin auto-évitant ne revient pas sur lui-même, donc $c_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$, d'où la majoration.

Pour la minoration, il suffit de montrer que $c_n \geq 2^n$. Or l'ensemble des chemins partant de l'origine dont les n pas sont dans $\{1, i\}$ est inclus dans \mathcal{C}_n , et de cardinal 2^n . □

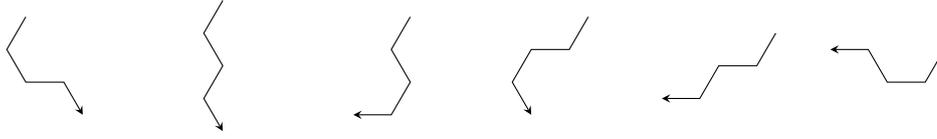


FIGURE 3 – Définition de E_4

2.2 Vers un encadrement plus fin

On peut en fait affiner la méthode présentée ci-dessus, en minorant c_{nk} par $|E_k|^n$, où $E_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{|E_k|}\}$ est un ensemble de séquences de k pas tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, et tout $(i_k)_{k \in [1, m]}$, la concaténation des $\sigma_{i_k, k \in [1, m]}$ est un chemin auto-évitant. Sur le réseau hexagonal, on peut trouver $|E_4| = 6$, avec l'ensemble de séquences représenté sur la figure 3. Donc $c_{4n} \geq 6^n$, donc $\mu \geq \sqrt[4]{6}$.

D'autre part, on peut améliorer la majoration, sachant que les chemins qui bouclent en six pas (*ie* pour lesquels il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma(k) = \gamma(k+6)$) ne sont pas auto-évitants. Sur le réseau hexagonal, on considère l'ensemble \mathcal{S}_n des $3 \cdot 2^{6n-1}$ chemins de longueur $6n$ qui ne reviennent pas sur leurs pas. On munit \mathcal{S}_n de la loi de probabilité uniforme. Soit $\gamma \in \mathcal{S}_n$. Les événements $(\gamma(6k) = \gamma(6k+6))_{k \in [0, n-1]}$ sont mutuellement indépendants, et chacun de probabilité $\frac{1}{16}$. Donc $\mathbf{P}(\gamma \text{ auto-évitant}) \leq \left(\frac{15}{16}\right)^n$. D'où $\mu \leq 2 \sqrt[6]{\frac{15}{16}}$.

On a donc montré :

PROPOSITION 5 *Sur le réseau hexagonal,*

$$\sqrt[4]{6} \leq \mu \leq 2 \sqrt[6]{\frac{15}{16}}.$$

2.3 Détermination de μ sur le réseau en échelle

Un exercice de [5] propose une méthode élémentaire pour déterminer μ .

PROPOSITION 6 *Sur le réseau en échelle,*

$$\mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Preuve Soit \mathcal{S}_n l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n partant de l'origine n'utilisant que les pas $\{1, i, -i\}$, s_n son cardinal. En notant u_n (resp. v_n) le nombre de chemins de \mathcal{S}_n dont le dernier pas est vertical (resp. horizontal), et $s_n = u_n + v_n$ avec $u_n = v_{n-1}$ et $v_n = u_{n-1} + v_{n-1}$. On en tire la relation de récurrence linéaire : $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. En résolvant, il vient alors : $\sqrt[n]{c_n} \geq \sqrt[n]{s_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

D'autre part, tout chemin auto-évitant sur le réseau en échelle se décompose en trois chemins (éventuellement triviaux) le long desquels l'évolution de la partie réelle des sommets est monotone (c'est le pendant de la décomposition en ponts décrite sur le réseau hexagonal par le lemme 9). Donc $c_n \leq \sum_{i+j+k=n} s_i s_j s_k = O\left(n^3 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, d'où le résultat. \square

3 Vers des méthodes plus systématiques : détermination de μ sur le réseau hexagonal

On se place désormais sur le réseau hexagonal. On se propose de présenter la preuve du théorème suivant, montré dans [1] :

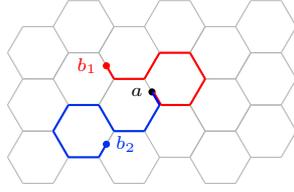


FIGURE 4 – Deux chemins auto-évitants, selon la nouvelle définition.

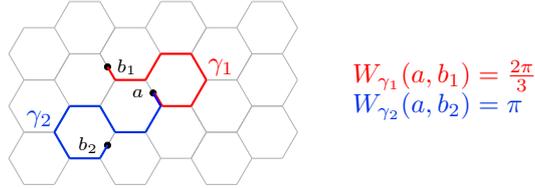


FIGURE 5 – Définition de l'enroulement d'un chemin.

THÉORÈME On a :

$$\mu = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Il s'agit de montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ vaut $r := \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Nouvelle définition d'un chemin Soit H l'ensemble des milieux des arêtes du réseau. On définit un *chemin* de longueur n comme une suite $(s_k)_{k \in [0, n+1]} \in (H \setminus \{\frac{s_1+s_2}{2}\}) \times \mathcal{H}^n \times (H \setminus \{\frac{s_{n-1}+s_n}{2}\})$ telle que pour tout $i \in [0, n]$, s_i et s_{i+1} sont consécutifs (on prolonge le début et la fin d'un chemin pour leur donner une direction) : voir figure 4. Les définitions données au paragraphe « Préliminaires » s'adaptent, avec les reconductions suivantes :

- On associe à un chemin de longueur n une suite de $n+1$ pas, le premier et le dernier étant de module $\frac{1}{2}$.
- Un chemin (a, s_1, \dots, s_n, b) est dit auto-évitant si, pour tout $i, j \in [1, n]$, $s_i \neq s_j$. En revanche, on autorise $a = b$.
- Pour $a \in H$ et $B \subset H$, on note $\gamma : a \rightarrow B$ l'ensemble des chemins auto-évitants de la forme (a, s_1, \dots, s_n, b) avec $b \in B$. Dans la suite, on fixe $a \in H$.

D'après le lemme d'association pour les familles sommables dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, il s'agit d'établir que $Z(x) := \sum_{\gamma: a \rightarrow H} x^{l(\gamma)}$ a pour rayon de convergence r .

3.1 Définition de l'observable parafermionique

Soit Ω un domaine borné de \mathcal{H} . On introduit l'outil suivant :

Définition Soit $\sigma, x \in \mathbb{R}_+$. L'*observable parafermionique* est défini pour tout $z \in \Omega$ par :

$$F(z) = \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega \\ \gamma: a \rightarrow z}} e^{-i\sigma W_\gamma(a, z)} x^{l(\gamma)},$$

où l'*enroulement* $W_\gamma(b_1, b_2)$ d'un chemin $\gamma : b_1 \rightarrow b_2$ de pas $(p_i)_{i \in [0, n+1]}$ est défini par la formule $W_\gamma(a, b) = \sum_{i=0}^n \arg \frac{p_{i+1}}{p_i}$, pour la fonction $z \mapsto \arg z$ à valeurs dans $] -\pi, \pi]$.

On pose dans toute la suite $\sigma = \frac{5}{8}$. On peut montrer :

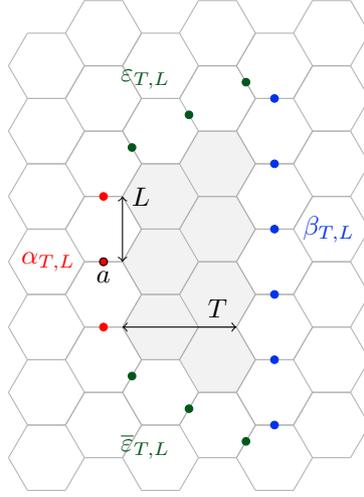


FIGURE 6 – Définition du sous-domaine en bande $\Omega_{2,1}$ (grisé) ; partition de son bord.

PROPOSITION 7 Pour $x = r$, on a pour tout sommet $s \in \Omega$:

$$(p - s)F(p) + (q - s)F(q) + (r - s)F(r) = 0,$$

où p, q, r sont les milieux des arêtes issues de s .

Remarque 6 Selon les termes utilisés dans [4], cela signifie que la fonction f définie pour u, v deux sommets consécutifs de \mathcal{H} par :

$$f(\vec{uv}) = \frac{u - v}{2} F\left(\frac{u + v}{2}\right)$$

vérifie la première loi de Kirchhoff. Cette notion de régularité, bien que faible (f n'est pas préholomorphe), suffit par la suite.

Remarque 7 Comme $f(\vec{uv}) + f(\vec{vu}) = 0$ pour tous u, v sommets consécutifs, on a :

$$\sum_{\substack{u \in \Omega, v \notin \Omega \text{ consécutifs} \\ \text{tq } \frac{u+v}{2} \in \Omega}} F\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

3.2 Équation au bord d'un domaine en bande

Soit $T, L \in \mathbb{N}^*$. On définit un domaine en bande borné et on partitionne les milieux d'arête situées sur son bord comme indiqué en figure 6. On définit, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$A_{T,L}(x) = \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega_{T,L}, \\ \gamma: a \rightarrow \alpha_{T,L}}} x^{l(\gamma)}, \quad B_{T,L}(x) = \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega_{T,L}, \\ \gamma: a \rightarrow \beta_{T,L}}} x^{l(\gamma)}, \quad E_{T,L}(x) = \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega_{T,L}, \\ \gamma: a \rightarrow \varepsilon_{T,L} \cup \bar{\varepsilon}_{T,L}}} x^{l(\gamma)}.$$

L'application de la remarque 7 à $\Omega_{T,L}$ permet de prouver :

PROPOSITION 8 On a :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) A_{T,L}(r) + B_{T,L}(r) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) E_{T,L}(r) = 1.$$

À x et T fixés, $(A_{T,L}(x))_L$ et $(B_{T,L}(x))_L$ sont croissantes, donc $(E_{T,L}(x))_L$ est décroissante. Comme toutes ces suites sont bornées, elles tendent respectivement vers $A_T(x), B_T(x), E_T(x)$ pour $L \rightarrow +\infty$, et la proposition 8 reste vraie lorsqu'on passe à la limite.

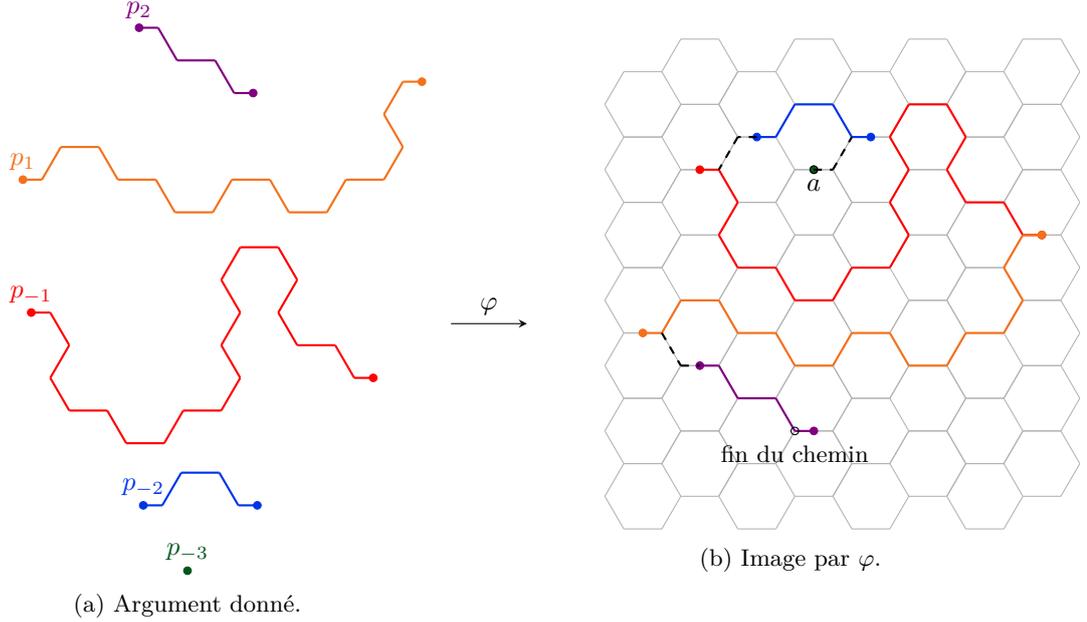


FIGURE 7 – Définition de φ .

3.3 Majorer, minorer, conclure

On comprend mieux la géométrie d'un chemin auto-évitant à partir de la notion suivante :

Définition Un chemin auto-évitant est appelé un *pont de largeur T* s'il existe un automorphisme du réseau qui l'envoie sur un chemin $\gamma \subset \Omega_T : a \rightarrow \beta_T$. On note P_T l'ensemble des ponts de largeur T partant de a .

Opérations élémentaires On note \circ la concaténation, $^{-1}$ l'inversion du sens de parcours d'un chemin, $\vec{\circ}$ l'opération de pontage définie pour deux chemins auto-évitants γ_1, γ_2 suites de pas associées $(p_k)_{k \in [0, n]}, (q_k)_{k \in [0, m]}$, par $\gamma_2 \vec{\circ} \gamma_1 = (p_0, \dots, p_{n-1}, p, q_0, q_1, \dots, q_m)$, où $p \notin \{-p_{n-1}, p_n\}$ est pris tel que (p_0, \dots, p_{n-1}, p) soit un chemin.

$$\text{Soit } P = \bigcup_{\substack{F_1, F_2 \subset \mathbb{N}^* \\ F_1, F_2 \text{ finis}}} \left(\prod_{T \in F_1} P_T \right) \times \left(\prod_{T \in F_2} P_T \right).$$

LEMME 9 *Tout chemin auto-évitant admet une décomposition en ponts canonique, au sens où on peut construire une fonction $\varphi : P \rightarrow \mathcal{C}$.*

Preuve Soit $p \in P$ d'ensembles associés $F_1, F_2 \subset \mathbb{N}^*$ de cardinaux respectifs i, j . Notons $F_1 = \{T_{-k} \mid k \in [1, i]\}, F_2 = \{T_k \mid k \in [1, j]\}$ avec $(T_{-k})_{k \in [1, i]}$ strictement croissante et $(T_k)_{k \in [1, j]}$ strictement décroissante. Alors $p = (p_k)_{k \in [-i, j] \setminus \{0\}}$, où $p_k \in P_{T_k}$ pour tout k .

On pose $\varphi(p) = \delta_2^{-1} \circ \delta_1$, où δ_1 est le chemin associé à $(p_{-i}^{(-1)^i} \vec{\circ} \dots \vec{\circ} p_{-2}^{-1} \vec{\circ} p_{-1})$ et δ_2 à $(p_j^{(-1)^j} \vec{\circ} \dots \vec{\circ} p_2^{-1} \vec{\circ} p_1)$: voir figure 7. On peut alors montrer que $\varphi(p)$ est bien définie par récurrence sur $i + j$. \square

Remarque 8 En revanche, tout chemin n'admet pas de telle décomposition : on peut notamment considérer le chemin $(a, a + \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2} + e^{\frac{2i\pi}{3}}, a + \frac{1}{2})$. Cela tient à la définition de l'opération de pontage.

Une version affaiblie de ce résultat affirme que tout chemin vérifiant les conditions de sommation de A_{T+1} mais non celles de A_T se décompose ainsi en un pont de largeur $T + 1$ et un de largeur T . On en déduit le :

COROLLAIRE 10 Pour tout $T \in \mathbb{N}^*$, $A_{T+1}(r) - A_T(r) \leq rB_{T+1}(r)^2$.

Dès lors, on conclut grâce aux les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 11 On a $Z(r) = +\infty$.

PROPOSITION 12 Soit $x < r$. La série $Z(x)$ converge dans \mathbb{R}_+ .

Preuve de la proposition 11 S'il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $E_T(r) \neq 0$, alors :

$$Z(r) \geq \sum_{\substack{\gamma: a \rightarrow \\ L \in \mathbb{N}^*}} \sum_{(\varepsilon_L \sqcup \bar{\varepsilon}_L)} r^{l(\gamma)} \geq \sum_{L \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega_{T,L} \\ \gamma: a \rightarrow \varepsilon_L \sqcup \bar{\varepsilon}_L}} r^{l(\gamma)} = \sum_{L \in \mathbb{N}^*} E_{T,L}(r) = +\infty.$$

Sinon, $E_T(r) = 0$ pour tout T . De la propriété 8 et du corollaire 10, on déduit : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) rB_{T+1}(r)^2 + B_{T+1}(r) \geq B_T(r)$ pour tout T , et par récurrence : $\frac{1}{T} = O(B_T(r))$. Ainsi, par comparaison avec la série harmonique, la somme sur T des $B_T(r)$ diverge, et on montre comme dans le premier cas que $Z(r) \geq \sum_{T \in \mathbb{N}^*} B_T(r)$. \square

Preuve de la proposition 12 Comme $\mathcal{C} \subset \varphi(P)$, il suffit de borner la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} x^{l(\varphi(p))} &= \sum_{\substack{F_1, F_2 \subset \mathbb{N}^* \\ F_1, F_2 \text{ finis}}} \left(\prod_{T \in F_1} B_T(x) \right) \left(\prod_{T \in F_2} B_T(x) \right) \\ &= \prod_{T \in \mathbb{N}^*} (1 + B_T(x))^2 \end{aligned}$$

Comme tout pont de largeur T est de longueur supérieure à T et comme $B_T(r) \leq 1$,

$$B_T(x) = \sum_{\gamma \in P_T} x^{l(\gamma)} \leq x^T \sum_{\gamma \in P_T} r^{l(\gamma)-T} = \left(\frac{x}{r}\right)^T B_T(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^T.$$

Donc $\sum_{T \in \mathbb{N}^*} B_T(x)$ converge, d'où la convergence du produit infini. Donc $Z(x) < +\infty$. \square

Références

- [1] H. DUMINIL-COPIN et S. SMIRNOV : The connective constant of the hexagonal lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. *Annals of Mathematics*, 175(3):1653 – 1665, 2012.
- [2] T. KENNEDY : A faster implementation of the pivot-algorithm for self-avoiding walks. *Journal of Statistical Physics*, 106:407 – 429, 2002.
- [3] N. MADRAS et G. SLADE : *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser, 1996.
- [4] S. SMIRNOV : Discrete complex analysis and probability. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, p. 595–621, Hyderabad, India, 2010.
- [5] W. WERNER : *Percolation et modèle d'Ising*, chap. 1. Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2009.