Université Pierre et Marie Curie

M2 de mathématiques fondamentales

Positivité du fibré tangent et de ses puissances extérieures sur une variété projective complexe

Mémoire de M2 de
Cécile Gachet

sous la direction de
Andreas Höring

Année scolaire 2018 - 2019

Table des matières

1 Introduction **2**

2 La théorie de Mori à l'ouvrage **2**
2.1 Le programme du modèle minimal (MMP) . . . 2
2.2 Le théorème du cône . . . 3
2.3 Retour au MMP : le cas des surfaces . . . 5
2.4 Les variétés de Fano . . . 5
2.5 Les courbes rationnelles pléthoriques . . . 6

3 Le problème étudié dans l'article de Li-Ou-Yang **7**
3.1 Quelques rappels sur les fibrés positifs . . . 7
3.2 La question posée et les résultats de l'article . . . 8
3.3 Les deux théorèmes principaux et leurs démonstrations . . . 8

4 Tentatives de généralisation **10**
4.1 Des exemples : diverses hypersurfaces et quelques produits . . . 11
4.2 Un lemme général de Li-Ou-Yang . . . 14
4.3 L'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski . . . 14
4.4 Quelques rappels sur les familles indivisibles de courbes rationnelles . . . 14
4.5 Un point sur les fibrés projectifs et les fibrés projectivisés . . . 16
4.6 Les contractions birationnelles . . . 17
4.7 Les contractions fibrées . . . 18

5 Bilan pour de petites valeurs de r **21**
5.1 Les cas traités par Li-Ou-Yang : $r = 1, 2$ . . . 21
5.2 Le cas $r = 3$ . . . 21

Références **21**

1 Introduction

Ce mémoire est essentiellement basé sur l'article [LOY18]. Il en expose les résultats et le prolonge un peu, par des méthodes différentes mais aucunement nouvelles.

Parmi ces méthodes, la théorie de Mori joue un rôle important. C'est pourquoi j'y propose en partie 2 une introduction assez subjective, qui ne prétend pas à l'exhaustivité. Tout ce que j'en sais peut être lu dans les notes de cours limpides d'Olivier Debarre [Deb11], sauf peut-être la sous-partie 2.5, issue de lectures et de réflexions plus personnelles.

La partie 3 propose un exposé de l'article [LOY18], sur lequel s'est basé mon travail. La présentation est centrée sur la caractérisation des variétés projectives lisses X dont : soit le fibré tangent T_X est strictement nef (théorème 1.4. de l'article : $X \simeq \mathbb{P}^n$), soit le fibré $\Lambda^2 T_X$ est strictement nef (théorème 1.5 de l'article : $X \simeq \mathbb{P}^n$ ou $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$). Les résultats de l'article ne servant pas directement à montrer ces théorèmes sont seulement énoncés.

Enfin, la partie 4 présente quelques arguments, issus de discussions avec mon encadrant Andreas Höring, pour l'étude de variétés X sur lesquelles le fibré $\Lambda^3 T_X$ est strictement nef. On montre que la seule telle variété X avec $\rho(X) \geqslant 2$ est $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Le cas où $\rho(X) \geqslant 2$ et $\Lambda^4 T_X$ est strictement nef est abordé, de façon non concluante, mais qui laisse un peu d'espoir. En revanche, les arguments présentés ne permettent pas du tout de traiter le cas $\rho(X) = 1$.

Dans tout ce mémoire, le corps de base est $\mathbb{C}$.

2 La théorie de Mori à l'ouvrage

Le vocabulaire de base des variétés, des diviseurs, des fibrés vectoriels et les notions de positivité usuelles (fibré en droite ample, nef ; 1-cycle effectif) ne sont pas rappelées. On peut les lire dans le manuel de géométrie algébrique [Har66, chapitres I et II.1, II.5, II.6, II.7].

Un léger doute peut flotter sur la notion d'espace projectif ; on notera toujours $\mathbb{P}(V) \to X$, où V est un fibré vectoriel sur X, l'*espace projectif des hyperplans* de V. On pourra noter $P(V) = \mathbb{P}(V^*)$ l'*espace projectif des droites* de V.

Dans la suite, sauf mention contraire, X est toujours une variété projective lisse, et S une surface projective lisse.

2.1 Le programme du modèle minimal (MMP)

On peut présenter des rudiments de théorie de Mori à travers le problème historique suivant : la recherche de modèles birationnels minimaux.

On considère l'ensemble des variétés projectives lisses [1] de dimension n fixée. Deux problèmes de classification s'y attachent : la classification à isomorphisme près et la classification birationnelle. Comme deux variétés isomorphes sont birationnellement équivalentes, le problème de la classification birationnelle qui apparaît comme le plus pertinent et le plus simple.

Pour autant, ces deux problèmes ont été résolus par Riemann dans le cas des courbes ($n = 1$). Les classifications obtenues sont intéressantes en soi, mais peu éclairantes pour la suite.

La question des surfaces est plus féconde. L'école italienne de géométrie algébrique s'y intéresse au début du vingtième siècle, et Enriques propose finalement une classification birationnelle des surfaces algébriques complexes, dont on peut lire un beau panorama dans le livre d'Arnaud Beauville [Bea78]. Cependant, certaines parties de la classification sont mal comprises, notamment les surfaces de type général. Ce sont les surfaces S de dimension de Kodaira 2, autrement dit les surfaces irrationnelles sur lesquelles le fibré canonique K_S est gros. Parmi les innombrables surfaces de ce type, comment trouver les classes d'équivalence birationnelle ? Comment savoir si deux surfaces sont birationnellement équivalentes, ou même si l'une admet un morphisme birationnel vers l'autre ?

C'est ainsi que peut émerger la question du modèle minimal : il s'agit d'exhiber, dans chaque classe d'équivalence birationnelle, une variété modèle minimale pour l'ordre partiel :

$$X \leqslant Y \text{ s'il existe un morphisme birationnel } Y \to X,$$

1. Cette hypothèse de régularité n'est pas la plus pertinente, on devrait remplacer « lisse » par *localement* $\mathbb{Q}$-*factorielle*.

défini sur l'ensemble des variétés projectives lisses, considérées à isomorphisme près.

Bien sûr, une classe birationnelle peut avoir plusieurs modèles minimaux non isomorphes, et c'est le cas notamment pour les surfaces réglées. Il s'avère cependant que c'est un phénomène rare... En effet, pour les surfaces, on a le résultat suivant, dû aux travaux de Mori, Castelnuovo, Enriques et Kodaira :

Théorème 2.1. *Une surface projective S admet toujours un modèle minimal de la forme suivante :*

1. *une surface lisse S_0 de fibré canonique K_{S_0} nef (auquel cas le modèle minimal est unique) ;*
2. *une surface géométriquement réglée $S_0 = P(V) \to C$, où V est un fibré vectoriel de rang 2 sur une courbe projective compacte lisse C ;*
3. *le plan projectif $S_0 = \mathbb{P}^2$.*

On remarque qu'il est important de *comprendre les classes numériques des courbes rationnelles* contenues dans S pour savoir dans quel cas de figure on se trouve.

Définition 2.2. Une courbe rationnelle C dans une variété X est dite

- K_X-*positive* (respectivement K_X-*négative*) si $K_X.C \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) ;
- K_X-*strictement-positive* (resp. K_X-*strictement-négative*) si $K_X.C > 0$ (resp. < 0).

Considérons les courbes rationnelles dans S. Si elles sont toutes K_S-positives, S est déjà un modèle minimal de type *1*.

Sinon, on a au moins une courbe rationnelle irréductible C qui est K_S-strictement-négative. D'après le théorème de Riemann-Roch,

$$-K_S.C = 2 + C^2.$$

En particulier, si $C^2 < 0$, on a $-K_S.C = C^2 = -1$. D'après un théorème classique de Castelnuovo, il existe alors un morphisme birationnel $S \to S'$ qui contracte C sur un point p de S', et qui fait de S l'éclatée en p de S'. En particulier, S n'est pas un modèle minimal dans ce cas.

Si $C^2 \geqslant 0$, en revanche, son étude n'apporte pas grand chose. Plutôt que d'étudier C, une courbe rationnelle K_S-strictement-négative quelconque, mieux vaut choisir soigneusement la courbe rationnelle K_S-strictement-négative qu'on étudie. Les critères de ce choix sont liés au théorème du cône de Mori, qui dégage une structure sur l'ensemble des courbes K_S-strictement négatives.

Dès lors, la preuve du théorème 2.1 repose principalement sur deux ingrédients. Le théorème du cône de Mori explique les classes numériques des courbes dans X. L'existence des contractions de Mori permet un dévissage de X : tant que X contient des courbes aux propriétés numériques remarquables, on peut écrire des morphismes birationnels $X \to X'$, qui permettent de descendre vers le modèle minimal espéré. La décroissance concomitante du nombre de Picard $\rho(X) > \rho(X') \in \mathbb{N}$ assure la terminaison de ce procédé.

Or, le théorème du cône s'énonce sans peine en dimension n quelconque, mais les résultats sur les contractions supportent mal la généralisation. Aujourd'hui encore, c'est de ce côté que portent de nombreux efforts pour faire tourner le MMP en toute dimension. Le lecteur intéressé peut consulter [Deb11, chapitre 8], qui présente les différents types de contractions de Mori envisageables en dimension $n \geqslant 3$ (contraction divisorielle, contraction fibrée, petites contractions), et fait référence à quelques articles présentant les avancées majeures en la matière (existence de flips en toute dimension, terminaison dans des cas particuliers).

2.2 Le théorème du cône

Énonçons le théorème du cône en toute généralité. Soit X une variété projective lisse de dimension n.

On rappelle que deux courbes C et C' contenues dans X sont *numériquement équivalentes* si pour tout diviseur de Cartier D dans X, $D.C = D.C'$.

On note $N_1(X)_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}$-module formellement engendré par les classes numériques des courbes contenues dans X, et $N_1(X)_{\mathbb{R}} := N_1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$.

Dans cet espace vectoriel de dimension finie, il y a $NE(X)$, le cône engendré par les classes numériques de courbes de X, qui contient exactement les 1-cycles effectifs dans X. Son adhérence, $\overline{NE}(X)$, est appelé le *cône de Mori* de X ; il peut contenir des 1-cycles, limites de courbes, qui ne sont pas effectifs.

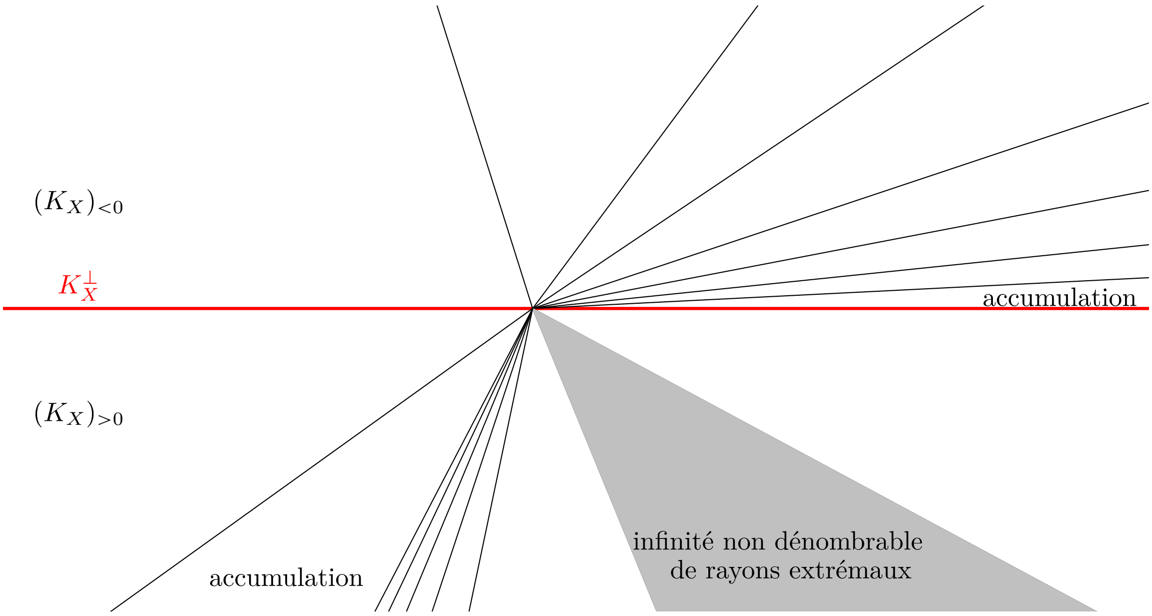
Avec ces notations,

Théorème du cône de Mori. *Il existe une famille finie ou dénombrable de courbes rationnelles* $(C_i)_{i\in I}$ *dans* X *telles que pour tout* $i \in I$, $0 < -K_X.C_i \leqslant n+1$, *et :*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geqslant 0} + \sum_{i\in I} \mathbb{R}_+[C_i].$$

De plus, les $\mathbb{R}_+[C_i]$ *sont exactement les rayons extrémaux* K_X*-strictement-négatifs de* $\overline{NE}(X)$*, et ils ne s'accumulent pas dans* $\overline{NE}(X)_{K_X<0}$.

Cette description donne lieu au schéma traditionnel suivant :



Cône de Mori d'une variété X, avec $\rho(X) = 3$,
projeté dans $\mathbb{R}^2$ parallèlement à une droite du plan $K_X^{\perp}$

La seconde étape de Mori consiste à définir la contraction d'un rayon extrémal sur X.

Définition 2.3. Soit R un rayon extrémal K_X-négatif de $\overline{NE}(X)$. La *contraction extrémale* (ou *contraction de Mori*) associée à R est le morphisme $X \to X'$ dont les courbes contractées sont exactement les courbes de classe numérique dans R.

Comme deux morphismes $X \to X'$ et $X \to X''$ qui contractent les mêmes courbes ne diffèrent que d'un isomorphisme $X' \to X''$, l'emploi de l'article défini est justifié.

Remarque 2.4. Mori a montré que tout rayon extrémal admet une contraction associée. Mais ces contractions ne sont pas toujours très régulières. Notamment, la variété d'arrivée X' peut ne pas être lisse. C'est fâcheux si on veut lui appliquer le théorème du cône pour continuer la réduction... Il faut donc étudier les singularités qui peuvent apparaître lors de contractions et établir des versions singulières des théorèmes de théorie de Mori (comme le théorème du cône). C'est le point de départ d'un vaste programme pour lequel on renvoie encore à [Deb11, chapitre 8].

Par ailleurs, il est important de comprendre les géométries relatives de $NE(X) \subset \overline{NE}(X)$ pour étudier la positivité des fibrés en droites sur X. En effet, on a les résultats suivants :

Proposition 2.5. *Soit* L *un fibré en droites sur une variété algébrique* X*. Alors* L *est :*

- *nef si et seulement si* $\forall\, Z \in NE(X)$, $L.Z \geqslant 0$ *;*
- *strictement nef si et seulement si* $\forall\, Z \in NE(X)$, $L.Z > 0$ *;*
- *ample si et seulement si* $\forall\, Z \in \overline{NE}(X)$, $L.Z > 0$ *(critère de Kleiman).*

2.3 Retour au MMP : le cas des surfaces

Fort du théorème du cône, on peut maintenant prouver le théorème 2.1. Cette sous-partie n'étant pas du tout liée à la suite du mémoire, sa lecture est facultative. L'exposition suit les notes de [Deb11]. Les cas *1, 2, 3* auxquels on fait référence sont ceux du théorème 2.1.

Soit S une surface projective, H un diviseur ample sur S.

Si K_S est nef, c'est le cas *1*.

Supposons que K_S n'est pas nef. Considérons alors R, un rayon extrémal K_S-strictement négatif de $\overline{NE}(S)$. Il contient une courbe rationnelle C minimale, au sens où :

$$-K_S.C = \min\{-K_X.C \mid C \text{ courbe rationnelle, } [C] \in R\}.$$

Premier cas. Si $C^2 > 0$, alors l'ouvert $U = \{z \in N_1(S)_{\mathbb{R}} \mid z^2 > 0, z.H > 0\}$ rencontre le rayon extrémal R. De plus, si $z \in U$, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a pour tout m assez grand :

$$h^0(S, mz) \geqslant \frac{1}{2}m^2z^2 + \frac{1}{2}mK_S.z + \chi(S, \mathcal{O}_S) > 0,$$

Donc $U \subset \overset{\circ}{NE}(S)$. Comme U rencontre R, il faut que $\overset{\circ}{NE}(S) = \overline{NE}(S) = R$. Donc $\rho(S) = 1$. De plus, par adjonction, $-K_S.C \geqslant 3$. Donc $-K_S$ est ample. On peut ensuite montrer que $S \cong \mathbb{P}^2$ (en utilisant par exemple [CMSB02, corollaire 0.3]). Il s'agit donc du cas *3*.

Deuxième cas. Si $C^2 = 0$, alors par adjonction $-K_S.C = 2$ et par Riemann-Roch,

$$h^0(S, mC) \geqslant m + \chi(S, \mathcal{O}_S).$$

Donc on peut trouver m tel que $0 < h^0(S, (m-1)C) < h^0(S, mC)$. Soit ι l'inclusion de C dans S. On considère la suite exacte de faisceaux sur S :

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \iota^*\mathcal{O}_C \to 0.$$

Tensorisons par $\mathcal{O}_S(mC)$. Il vient en cohomologie :

$$0 \to H^0(S, (m-1)C) \to H^0(S, mC) \xrightarrow{r} H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

car $\deg \mathcal{O}_C(C) = C^2 = 0$. Par le choix de m, la flèche r est surjective et on est dans le cas où $\mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C$.

Le diviseur mC n'a de point base que sur C ; mais il admet une section s telle que $r(s) = 1$. En particulier, $s|_C$ ne s'annule pas, donc mC n'a pas non plus de point base sur C.

Ainsi le morphisme associé $\varphi_{|mC|}$ de S vers $\mathbb{P}(H^0(S, mC))$ est bien défini, et son image est une courbe. Quitte à en prendre la factorisation de Stein, on peut supposer que cette image est une courbe lisse. La fibre générale est alors une courbe rationnelle irréductible réduite, numériquement équivalente à C. Donc S est une surface réglée et, minimale ou pas, elle a un modèle minimal de type *2*. Cette dernière assertion est démontrée dans [Bea78, chapitre III].

Troisième et dernier cas. Sinon, $C^2 < 0$. Alors $K_S.C = C^2 = -1$ et, comme dit dans la sous-partie 2.1, un théorème de Castelnuovo établit l'existence d'un morphisme birationnel partant de S qui contracte C. Donc S n'est pas un modèle minimal.

2.4 Les variétés de Fano

Il y a une famille de variétés projectives sur laquelle l'étude du cône de Mori est particulièrement simple : les variétés de Fano.

Définition 2.6. Une variété projective lisse X est dite *de Fano* si son diviseur anticanonique $-K_X$ est ample.

Pour une telle variété,

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X<0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}_+[C_i] \subset NE(X),$$

donc le cône des courbes est automatiquement un cône polyédral fermé finiment engendré.

D'après la proposition 2.5, les problèmes numériques sont particulièrement simples sur les variétés de Fano ; notamment, il suffit que les nombres d'intersections $H.C_i$ soient strictement positifs pour $i \in [\![1, n]\!]$ pour que le diviseur H soit ample.

Sur une variété de Fano, si jamais les contractions de Mori conservent une certaine régularité des variétés étudiées, c'est un résultat fort et très utile. C'est pourquoi la classification des surfaces de Fano, qu'on appelle aussi les *surfaces de Del Pezzo*, est très simple. Dès la dimension 3, les contractions de Mori peuvent donner, partant d'une variété projective lisse, une variété singulière. La classification devient alors plus compliquée, et il faut étudier au cas par cas la régularité des différentes contractions de Mori possibles. Pour les variétés de Fano de dimension 3, ça a été fait et leur classification est finalement à disposition dans l'article [MM81].

Cette idée de classifier une famille de variétés *via* l'étude des contractions de Mori qu'elles peuvent supporter est bonne. On l'a reprise comme le leitmotiv de la partie 4.

2.5 Les courbes rationnelles pléthoriques

Mentionnons un troisième résultat sur les variétés de Fano. C'est encore un théorème de Mori :

Théorème 2.7. *Soit X une variété de Fano de dimension n. Par tout point x de X, il passe une courbe rationnelle C telle que $-K_X.C \leqslant n+1$.*

Ce théorème s'avère également vrai sur toute variété projective lisse X dont le diviseur anticanonique est nef, mais pas numériquement trivial. C'est le cas des variétés qu'on étudiera dans la suite. Il est donc opportun de garder à l'esprit qu'à partir de la partie 3, on travaille sur des variétés projectives recouvertes de courbes rationnelles.

Par ailleurs, la borne en $n+1$ est optimale : $\mathbb{P}^n$ est une variété de Fano de dimension n, et on peut la recouvrir par des droites sur lesquelles $-K_{\mathbb{P}^n}$ est de degré $n+1$. C'est en outre une caractérisation de $\mathbb{P}^n$, au sens du théorème suivant de Cho-Miyaoka-Shepherd–Barron [CMSB02, corollaire 0.3] :

Théorème 2.8. *Soit X une variété de Fano de dimension n. Alors :*

$$X \simeq \mathbb{P}^n \iff -K_X.C \geqslant n+1 \quad \forall\, C \subset X \text{ courbe rationnelle.}$$

Un résultat récent de Thomas Dedieu et d'Andreas Höring [DH17, corollaire 1.4] continue de creuser dans la même direction :

Théorème 2.9. *Soit X une variété projective de dimension n, contenant un courbe rationnelle. Supposons que pour tout courbe rationnelle $C \subset X$, $-K_X.C \geqslant n$. Alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$, à l'hyperquadrique $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ ou à un fibré projectif sur une courbe.*

Ces deux résultats reposent sur des raffinements de la théorie de Mori sur les déformations de courbes rationnelles, dont le résultat le plus emblématique est sans doute le lemme « Bend-and-Break ».

Le cœur de la preuve du théorème de Cho, Miyaoka, Shepherd-Baron réside dans l'étude de l'espace des déformations d'une famille indivisible de courbes rationnelles (*unsplitting family of rational curves*), de dimension particulièrement grande. Dans une situation où l'inégalité $-K_X.C \geqslant l$ est vérifiée pour toute courbe rationnelle C dans X, avec $l < n+1$ (typiquement $l = n$ dans le théorème de Dedieu-Höring, ou $l = n-1$ dans la sous-partie 5.2), le théorème ne s'applique certes plus, mais l'étude d'une famille indivisible de courbes rationnelles peut encore s'avérer pertinente.

L'idée du théorème de Dedieu et de Höring est de travailler plus finement dans le fibré projectivisé $\mathbb{P}(\Omega_X)$. Une fois exclus les cas de $\mathbb{P}^n$ et du fibré projectif, ils présentent la construction suivante. À une courbe lisse C de X, en un point donné, ils associent la direction tangente (une droite de T_X, un hyperplan de Ω_X) dans $\mathbb{P}(\Omega_X)$. Ils établissent alors une correspondance entre la famille de courbes rationnelles obtenue en déformant C et un diviseur D de $\mathbb{P}(\Omega_X)$, et calculent la classe numérique de ce diviseur.

Une fois établi que

$$D \equiv_{\mathbb{Q}} 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X)}(1) - \frac{2}{n}\pi^* K_X,$$

ils montrent une sorte de résultat d'homogénéité : en chaque point $x \in X$, les déformations de C passant par x forment le même type de sous-espace tangent, à savoir le type de sous-espace tangent qu'on peut observer en déformant une courbe rationnelle, fixée en un point, sur une hyperquadrique lisse. Un théorème de Mok [Mok08] leur permet de conclure que X est justement une hyperquadrique lisse.

On pourrait espérer emprunter un chemin analogue pour étudier les variétés projectives X de nombre de Picard 1 sur lesquelles $\Lambda^3 T_X$ est strictement nef (et ainsi achever l'étude entamée dans la sous-partie 5.2).

3 Le problème étudié dans l'article de Li-Ou-Yang

3.1 Quelques rappels sur les fibrés positifs

On s'intéresse à trois notions de positivité, rappelées dans la proposition 2.5 pour les fibrés en droites : le caractère nef, le caractère strictement nef et l'amplitude. Ces trois notions peuvent être généralisées à des fibrés vectoriels. Historiquement, ces définitions et les premières propriétés nous viennent de [Har66].

Définition 3.1. Soit E un fibré vectoriel sur une variété algébrique X. On dit que E est nef (respectivement strictement nef, ample) si le fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ sur $\mathbb{P}(E)$ est nef (resp. strictement nef, ample).

Remarque 3.2. Un autre idée serait de définir la positivité de E en passant par son déterminant $\det E$. Mais les propriétés qui en découleraient sont moins intéressantes, et cette définition semble inusitée depuis les années 70.

L'amplitude et le caractère nef sont stables par diverses opérations (extensions, quotients, passage au déterminant, aux puissances tensorielles, symétriques, extérieures). Des preuves détaillées sont rédigées dans [Laz03, chapitre 6.1].

Avec le caractère strictement nef, il faut être plus prudent. Certes, strictement nef et amples sont deux notions équivalentes sur les courbes rationnelles et sur les courbes elliptiques (pour ce second point, voir [LOY18, théorème 3.1]). Mais déjà sur une courbe de genre 2, il existe un fibré vectoriel de rang 2 qui est strictement nef mais pas ample. [2] Gardons tout de même à l'esprit la caractérisation suivante :

Proposition 3.3. *Soit E un fibré vectoriel sur X une variété projective lisse. S'équivalent :*

- *E est strictement nef ;*
- *pour toute courbe projective lisse C et tout morphisme non constant $f : C \to X$, tout fibré en droites L quotient de f^*E sur C vérifie :* $\deg L > 0$ *;*
- *pour toute courbe projective lisse C et tout morphisme non constant $f : C \to X$, f^*E est strictement nef sur C.*

La preuve repose exclusivement sur les deux remarques suivantes.

Remarque 3.4. Le caractère strictement nef d'un fibré en droites est invariant par morphisme fini.

Remarque 3.5. Appliquons [Har66, exercice II.7.8] dans notre contexte. Si C est une courbe projective lisse, la donnée conjointe d'un morphisme non constant $f : C \to X$ et d'un fibré en droites L sur C qui est un quotient de f^*E équivaut à la donnée d'une section $s : C \to \mathbb{P}(E)$. De plus, si L et s sont ainsi associés,

$$L \simeq s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1).$$

Démonstration. Le caractère strictement nef de E se teste en calculant le degré du fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ sur toutes les courbes de $\mathbb{P}(E)$, ou de façon équivalente, en calculant le degré de $c^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ pour toute courbe rationnelle lisse C et pour tout morphisme $g : C \to \mathbb{P}(E)$ fini sur son image.

Le degré de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est clairement strictement positif sur les courbes contractées par p.

Soit C une courbe rationnelle lisse. S'équivalent :

- pour tout morphisme non constant $g : C \to \mathbb{P}(E)$, $\deg g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) > 0$;
- pour tout morphisme non constant $g : C \to \mathbb{P}(E)$ dont la courbe image n'est pas contractée par p, $\deg g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) > 0$;

2. Un exemple est construit dans [Har, exemple 10.6], à l'origine pour fabriquer une surface dont le cône des courbes n'est pas fermé (c'est le contre-exemple classique de Mumford)

- pour toute section $s : C \to \mathbb{P}(E)$, $\deg s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) > 0$;
- pour tout morphisme non constant $f : C \to X$ et tout fibré en droites L sur C qui est un quotient de f^*E, $\deg L > 0$.

Ainsi, les deux premiers points de la proposition sont équivalents.

Le troisième point est alors une conséquence de cette équivalence et de la remarque 3.4. □

D'autres propriétés des fibrés strictement nef et leurs démonstrations détaillées sont présentées dans [LOY18, partie 2]. On utilisera notamment dans la suite que :

- si $G = E \oplus F$ est strictement nef, alors E et F sont strictement nefs ;
- si $f : X \to Y$ est un morphisme fini, et E est strictement nef sur Y, alors f^*E est strictement nef sur X.

3.2 La question posée et les résultats de l'article

L'article de Li-Ou-Yang [LOY18] tourne autour du problème suivant : soit X une variété projective lisse et $r \in [\![1, n]\!]$ tels que $\Lambda^r X$ est strictement nef. Que peut-on en déduire ?

Cette question rappelle plusieurs conjectures et théorèmes :

- comme antécédent raisonnable, un théorème de Mori [Mor79] : si T_X est ample, alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$;
- comme horizon lointain, une conjecture de Campana-Peternell : si $-K_X$ est strictement nef, alors X est de Fano ;
- comme généralisation rapide proposée par Li-Ou-Yang : si $\Lambda^r T_X$ est strictement nef, alors $\Lambda^r T_X$ est ample (démontrée dans [LOY18] pour $r = 1, 2$) ;
- comme résultat de demi-mesure : si $\Lambda^r T_X$ strictement nef, alors X est de Fano ([LOY18] pour $r = 1, 2$, étendu à $r = 3$ dans la sous-partie 5.2 de ce mémoire).

Remarque 3.6. S'il existe $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef, *a fortiori* nef, son déterminant

$$\det \Lambda^r T_X = -K_X^{\otimes \binom{n-1}{r-1}}$$

est aussi nef. Donc $-K_X$ est nef.

En revanche, $-K_X$ n'a aucune raison d'être strictement nef. Il pourrait même être numériquement trivial, a priori. Néanmoins, on a le résultat suivant[LOY18, lemme 3.2] :

Lemme 3.7. *Soit E un fibré vectoriel strictement nef sur une variété projective X telle que $0 \leqslant \kappa(X) < \dim X$. Alors $\det E$ n'est pas numériquement trivial.*

La preuve n'est pas exposée ici, car elle passe par des résultats plutôt analytiques (lien entre les propriétés métriques et numériques d'un fibré vectoriel d'une part, entre des fibrés plats et des représentations de groupe fondamental d'autre part).

Les résultats principaux de l'article sont deux théorèmes : l'un ([LOY18, théorème 1.3], 3.8 ici) étudie les sections du morphisme d'Albanese d'une variété projective lisse X sur laquelle $-K_X$ est nef. Le second théorème ([LOY18, théorème 1.2], théorème 3.12 ici) établit que si X est une variété projective lisse avec $\Lambda^r T_X$ strictement nef pour un $r \in [\![1, n]\!]$, alors X est rationnellement connexe. Nous énoncerons plus précisément ces théorèmes et en exposerons les idées dans la prochaine sous-partie.

De ces deux théorèmes et du lemme général 4.11, Li-Ou-Yang déduisent la liste des variétés X sur lesquelles $\Lambda^r T_X$ est strictement nef pour $r = 1$ et $r = 2$. Nous reviendrons sur ces résultats dans la sous-partie 5.1.

3.3 Les deux théorèmes principaux et leurs démonstrations

Théorème 3.8. *Soit X une variété projective lisse, avec $-K_X$ nef. Alors, quitte à remplacer X par un revêtement étale fini, on peut construire une section $\sigma : A \to X$ du morphisme d'Albanese telle que $\sigma^*(-K_X)$ est numériquement trivial.*

Idée de la démonstration. On part de la correspondance entre les vecteurs propres d'une représentation d'un groupe fondamental $G = \pi_1(B)$, et les sous-fibrés plats de codimension 1 du fibré plat E sur B. On remarque que, pour peu que G soit abélien et finiment engendré, et donc pour peu qu'on se place sur une variété abélienne B, la représentation de G admet un vecteur propre global. Cela nous donne un sous-fibré plat de codimension 1 dans E.

Fort de ces remarques, l'article propose la construction suivante :

Définition 3.9. Fixons B une variété abélienne. On dit qu'une variété polarisée (X, L) est *bien construite* pour le morphisme $f : X \to B$ si :

- $E = f_*L$ est un fibré vectoriel plat (il correspond donc à une représentation ρ de $\pi_1(B)$, qui admet un vecteur propre v) ;
- L est très ample sur les fibres de f ;
- le vecteur propre v de ρ induit une section $\sigma : B \to X$;
- comme v correspond aussi à la donnée d'un sous-fibré plat F de codimension 1 dans E, on a une suite exacte :
$$0 \to F \to E \to Q \to 0,$$
avec Q fibré en droites plat sur B et, avec ces notations, $Q \simeq \sigma^*L$.

Cette construction vérifie :

Proposition 3.10. *Supposons que (X, L) est bien construite pour $f : X \to B$, et que $-K_X$ est nef. Alors il existe un $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X, (-K_{X/B} \otimes L)^{\otimes r})$ est également bien construite pour le morphisme $f : X \to B$.*

De plus, on peut faire en sorte que les deux constructions induisent les mêmes sections σ de f.

Proposition 3.11. *Si X est une variété projective lisse et $-K_X$ est nef, alors il existe $\tilde{X}$ un revêtement étale fini de X et L une polarisation sur $\tilde{X}$ tels que $(\tilde{X}, L)$ est bien construite pour le morphisme d'Albanese de $\tilde{X}$.*

En admettant ces deux propositions, on peut conclure comme ceci.

Soit X une variété projective lisse, avec $-K_X$ nef. Notons $f : X \to A$ son morphisme d'Albanese. Par la proposition 3.11, quitte à remplacer X par un revêtement étale fini, on dispose d'une polarisation L sur X telle que (X, L) est bien construite pour f. Il en vient une section σ de f telle que σ^*L est plat, donc numériquement trivial. De plus, d'après la proposition 3.10, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^*(-K_{X/A} \otimes L)^{\otimes r}$ est aussi numériquement trivial. Ainsi, $\sigma^*(-K_{X/A})$ est numériquement trivial. Comme A est abélienne,

$$\sigma^*(-K_X) = -K_A \otimes \sigma^*(-K_{X/A})$$

est numériquement trivial. □

Théorème 3.12. *Soient X une variété projective lisse, $r \in [\![1, n]\!]$ tels que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Alors X est rationnellement connexe.*

La preuve se déroule en deux étapes. Tout d'abord, on démontre la proposition suivante :

Proposition 3.13. *Soient X une variété projective lisse, $r \in [\![1, n]\!]$ tels que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Alors le groupe fondamental de X est fini.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que tout revêtement étale fini $Y \to X$ a une irrégularité $q(Y)$ nulle. Soit Y un tel revêtement.

Le fibré tangent de Y a les mêmes propriétés numériques que celui de X. Donc, d'après le théorème 3.8, on dispose d'un revêtement étale fini Z de Y et d'une section σ du morphisme d'Albanese associé tels que $\sigma^*(-K_Z)$ est numériquement trivial sur $\mathrm{Alb}(Z)$. Comme $q(Y) \leqslant q(Z)$, si $q(Z) = 0$, c'est gagné.

Supposons par l'absurde que $q(Z) > 0$. Sur $\mathrm{Alb}(Z)$, le fibré en droites

$$\det \sigma^* \Lambda^r T_Z = \sigma^*(-K_Z)^{\otimes \binom{n-1}{r-1}}$$

est numériquement trivial. Comme la dimension de Kodaira d'une variété abélienne est nulle, le lemme 3.7 s'applique et donc $\sigma^* \Lambda^r T_Z$ n'est pas strictement nef. Donc $\Lambda^r T_Z$ n'est pas strictement nef, donc $\Lambda^r T_X$ n'est pas strictement nef, et c'est absurde !

Donc tout revêtement étale fini T de X vérifie $q(Y) = 0$.

Or, d'après [Pau97], toute variété projective lisse dont le diviseur anticanonique est nef a un groupe fondamental presque abélien. Autrement dit, il existe un revêtement étale fini Z de X dont le groupe fondamental est abélien. Donc $\pi_1(Z_{an}) = H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ est trivial. Donc Z est le revêtement universel de X. Comme $Z = \tilde{X} \to X$ est un revêtement étale fini, $\pi_1(X_{an})$ est fini. □

Fort de cette proposition, on considère le revêtement universel $\tilde{X}$ de X : comme $\tilde{X} \to X$ est un morphisme fini, $\Lambda^r T_{\tilde{X}}$ est strictement nef. On applique le théorème de décomposition récent de [CH17] pour les variétés projectives simplement connexes de diviseur anticanonique nef. Ainsi,

$$\tilde{X} \cong Y \times F$$

où K_Y est numériquement trivial et F est rationnellement connexe. D'après le lemme 3.14 ci-dessous, Y est un point et finalement $\tilde{X}$ est rationnellement connexe, donc X l'est aussi.

Lemme 3.14. *Soient X une variété projective lisse, $r \in [\![1, n]\!]$ tels que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Supposons que $X = Y \times Z$, avec $\dim Y, \dim Z \geqslant 1$. Alors $-K_Y$ et $-K_Z$ sont strictement nefs.*

Démonstration. C'est assez élémentaire. On a $T_X = pr_1^* T_Y \oplus pr_2^* T_Z$.

Supposons par l'absurde que $r \leqslant \dim Y$. Comme $\Lambda^r pr_1^* T_Y$ est un facteur direct de $\Lambda^r T_X$, il est strictement nef. Pourtant, sa restriction à une fibre de pr_1 est un fibré vectoriel trivial, ce qui est absurde ! Donc $r > \dim Y$.

Ainsi $pr_1^*(-K_Y) \otimes \Lambda^{r-\dim Y} pr_2^* T_Z$ est un facteur direct de $\Lambda^r T_X$, donc il est strictement nef. Pour un $z \in Z$ fixé, on a donc $pr_1^*(-K_Y)$ strictement nef sur $Y \times \{z\}$. Donc $-K_Y$ est strictement nef.

Par symétrie, on montre de même que $-K_Z$ est strictement nef. □

4 Tentatives de généralisation

Après la lecture de l'article, Andreas Höring m'a proposé d'étudier les variétés X de dimension supérieure à 4 sur lesquelles $\Lambda^3 T_X$ est strictement nef. [3] Son idée était d'étudier quelles contractions de Mori peuvent exister sur X. C'est le programme que j'ai suivi, pour les contractions birationnelles puis pour les contractions fibrées.

Un cas reste dans l'ombre : celui des variétés X de nombre de Picard 1. C'est peu étonnant, car il s'agit aussi du cas problématique dans l'article [DH17], qui s'intéresse à un problème lié.

Il y a tout de même une bonne nouvelle dans ce cas :

Proposition 4.1. *Soit X une variété projective lisse telle que $\rho(X) = 1$, $r \in [\![1, n]\!]$ tels que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Alors X est une variété de Fano.*

Démonstration. Comme X est projective, elle a au moins un diviseur ample. De $\rho(X) = 1$, il vient que tout diviseur sur X est ample ou numériquement trivial.

Si $r = n$, $-K_X$ est strictement nef, donc il n'est pas numériquement trivial.

Sinon, soit C une courbe rationnelle dans X (elle existe d'après le théorème 3.12). Le lemme 4.11 montre que $-K_X.C \geqslant 3$, donc $-K_X$ n'est pas numériquement trivial.

Bref, dans tous les cas, $-K_X$ est ample. □

Les sous-parties 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 sont des exposés de résultats connus. Un peu plus élaborés que la théorie de Mori, je n'ai pas voulu les présenter en début de mémoire pour ne pas rebuter le lecteur et rentrer vite dans le vif du sujet. D'ailleurs, je présente la plupart de ces résultats sans les démontrer.

Les sous-parties 4.1, 4.6 et 4.7 sont au cœur du travail que j'ai fait. Certains des résultats peuvent sans doute être approfondis. Quand cela me semblait important, je l'ai mentionné.

3. En dimension 3, ce problème est déjà résolu et difficile. En effet, toutes les variétés de Fano de dimension 3 vérifient cette hypothèse. Elles sont nombreuses, comme le montre leur liste exhaustive donnée par Mori et Mukai dans l'article historique [MM81]. Enfin, ce sont bien les seules, puisque Serrano a établi la conjecture de Campana-Peternell en dimension 3 dans l'article [Ser95].

4.1 Des exemples : diverses hypersurfaces et quelques produits

Dans cette sous-partie, je présente tous les exemples que je connais de variétés X sur lesquels $\Lambda^r T_X$ est strictement nef, pour un $r \in 1, \dim X - 1\rrbracket$. Dans tous les cas exposés, il est même ample (et donc X est de Fano).

Il y a tout d'abord les espaces projectifs.

Proposition 4.2. *Soit $X = \mathbb{P}^n$ avec $n \geqslant 1$. Alors T_X est ample.*

Démonstration. La suite exacte d'Euler fait apparaître un quotient

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0,$$

et comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est ample, et l'amplitude est préservée par les sommes directes et par les quotients, $T_{\mathbb{P}^n}$ est bien ample. □

On remarque également qu'il y a matière à discuter sur les hypersurfaces lisses. Étudions pour commencer l'hypersurface quadrique lisse $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. La structure de $\mathbb{P}(T_{\mathbb{Q}^n}) \to \mathbb{Q}^n$ est bien comprise, et cette proposition l'explique succinctement :

Proposition 4.3. *Soit $n \geqslant 2$. Alors pour toute courbe $C \subset \mathbb{Q}^n$ qui n'est pas une droite, $T_{\mathbb{Q}^n}|_C$ est ample. De plus, notons ℓ une droite de $\mathbb{Q}^n$. On a alors*

$$T_{\mathbb{Q}^n}|_\ell = \mathcal{O}_\ell(2) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)^{\oplus n-2} \oplus \mathcal{O}_\ell.$$

En particulier, $\Lambda^2 T_{\mathbb{Q}^n}$ est strictement nef.

Si E est un fibré vectoriel sur $X \subset \mathbb{P}^n$ et $d \in \mathbb{Z}$, on note généralement

$$E(d) := E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X.$$

Avec ce raccourci, énonçons le lemme suivant.

Lemme 4.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a un isomorphisme $T_{\mathbb{Q}^n} \simeq \Omega_{\mathbb{Q}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$.*

Démonstration. La forme bilinéaire associée à la forme quadratique $x_0^2 + \ldots + x_{n+1}^2$ sur $\mathbb{P}^{n+1}$ induit un couplage parfait : $T_{\mathbb{Q}^n} \times T_{\mathbb{Q}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$. Donc $T_{\mathbb{Q}^n}(-2)$ est le dual de $T_{\mathbb{Q}^n}$, donc $T_{\mathbb{Q}^n}$ et $\Omega_{\mathbb{Q}^n}(2)$ sont bien isomorphes. □

Exposons maintenant [WSC04, exemple 1], dans l'optique de démontrer la proposition 4.3. Comme $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$, il y a une surjection $\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}} \to \Omega_{\mathbb{Q}^n}$, et donc une injection associée de $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{Q}^n}(2))$ dans $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2))$. Cette injection se place dans le contexte suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(T_{\mathbb{Q}^n}) & P(T_{\mathbb{P}^{n+1}}(-2)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & P(T_{\mathbb{P}^{n+1}}) \\
\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{Q}^n}(2)) \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1}) \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[dl, "pr_1"] \\
\mathbb{Q}^n \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1}) = \{(x,d) \in \mathbb{P}^{n+1} \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^{n+1}) \mid x \in d\}$ est la *variété-drapeau des points et des droites* de $\mathbb{P}^{n+1}$. En effet, un point de $P(T_{\mathbb{P}^{n+1}})$ est un couple (x, v), où x est un point de $\mathbb{P}^{n+1}$ et v une direction dans l'espace tangent à $\mathbb{P}^{n+1}$ en x. On lui associe le point (x, d) de la variété-drapeau, où d est la droite de direction v passant par x. Parlons un peu de cette variété. Elle vient avec deux fibrations naturelles

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1}) \arrow[r, "\text{fibre } \mathbb{P}^1", "pr_2"'] \arrow[d, "pr_1"', "\text{fibre } \mathbb{P}^n"] & \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^{n+1}) \\
\mathbb{P}^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

données par les morphismes d'oubli : pour $x \in \mathbb{P}^{n+1}$, $pr_1^{-1}(x)$ est l'ensemble des (x, d), où d passe par x, et pour $d \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^{n+1})$, $pr_2^{-1}(d)$ est l'ensemble des (x, d), où x appartient à d.

Définition 4.5. Le fibré tautologique ζ sur la variété-drapeau est le graphe de l'application

$$(x,d) \in \mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1}) \mapsto d \subset \mathbb{C}^{n+2}.$$

Sur une fibre F de pr_2, on sait calculer le degré de ζ : l'isomorphisme entre F et $\mathbb{P}^1$ identifie $\zeta|_F$ à $K_{\mathbb{P}^1}$, qui est de degré -2.

On peut noter à l'occasion que $pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1).F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1).pr_1(F) = 1$, car F est projetée sur une droite.

Définition 4.6. On se place sur une variété X. On dit qu'un fibré en droites L *contracte* une courbe C si $L.C = 0$. Notamment, si L est globalement engendré, les courbes contractées par L sont exactement les courbes contractées par le morphisme $\varphi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X,L)^*)$.

Par exemple, $\zeta \otimes pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$ contracte les fibres de pr_2.

Montrons maintenant que la variété-drapeau a un groupe de Picard de rang 2, engendré par $pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$ et par ζ. On applique simplement [Har77, exercice II.7.9] : le groupe de Picard de $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2))$ est isomorphe à $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^{n+1}) \times \mathbb{Z}$, de rang 2. De plus, l'identification d'une fibre G de pr_1 avec $\mathbb{P}^n$ envoie le fibré $\zeta|_G$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. En particulier, $pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$ et ζ sont numériquement indépendants, et donc ils engendrent $\mathrm{Pic}(\mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1}))$.

Par conséquent, si on note H un fibré en droites ample sur $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^{n+1})$, $pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)$ (non nul sur les fibres de pr_2) et pr_2^*H engendrent encore le groupe de Picard de la variété-drapeau. Ainsi, tout fibré L qui contracte les fibres de pr_2 est un multiple de pr_2^*H.

Notamment, il ne contracte rien de plus. Donc le morphisme pr_2 est (à isomorphisme près sur la variété d'arrivée) le morphisme associé au fibré $\zeta \otimes pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$.

De surcroît, l'isomorphisme $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \simeq \mathrm{Dr}(\mathbb{P}^{n+1})$ fait correspondre la fibre F_d de pr_2 sur la droite $d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ à la section triviale de $\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)|_d \simeq \mathcal{O}_d \oplus \mathcal{O}_d(1)^{\oplus n-1} \oplus \mathcal{O}_d(2)$. Donc le fibré tautologique de $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2))$ en restriction à F_d est de degré nul. Donc c'est un multiple de pr_2^*H de même que de $\zeta \otimes pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$. Comme il coïncide lui aussi avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sur une fibre $\mathbb{P}^n$ de pr_1, c'est exactement $\zeta \otimes pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2)$.

Finalement, pr_2 est (à isomorphismes près à la source et à l'arrivée) le morphisme associé au fibré tautologique de $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(2))$. Les courbes que ce fibré tautologique contracte sont donc notamment envoyées par pr_1 sur des droites de $\mathbb{P}^{n+1}$.

De plus, comme $\mathbb{Q}^n$ est homogène, $T_{\mathbb{Q}^n}$ est globalement engendré. Ainsi, l'application birationnelle induite par le fibré tautologique de $\mathbb{P}(T_{\mathbb{Q}^n})$ est aussi un morphisme. Ses fibres exceptionnelles sont recouvertes par les courbes de $\mathbb{P}(T_{\mathbb{Q}^n})$ que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\mathbb{Q}^n})}(1)$ contracte, et donc φ les envoie toutes sur des droites de $\mathbb{Q}^n$.

On peut maintenant démontrer la proposition 4.3 :

Démonstration la proposition 4.3. Notons $\mathbb{Q}^n = Q$, et notons ξ le fibré tautologique de $\mathbb{P}(T_Q)$. Soit $C \subset Q$ une courbe qui n'est pas une droite. On vient de montrer que le morphisme $f|_{\varphi^{-1}(C)}$: $\mathbb{P}(T_Q|_C) \to \mathbb{P}^N$ est fini. Donc $\xi|_{\mathbb{P}(T_Q|_C)}$ a un multiple très ample, donc il est ample. Or, il s'agit du fibré tautologique de $\mathbb{P}(T_Q|_C)$. Donc, par définition, $T_Q|_C$ est ample, *a fortiori* strictement nef.

Reste à étudier T_Q en restriction à une droite de Q. Comme Q est homogène, T_Q est globalement engendré et nef.

Soit ℓ une droite de Q. On dispose de $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ tels que :

$$T_Q|_\ell \simeq \mathcal{O}_\ell(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\ell(a_n),$$

Il existe un morphisme non nul $T_\ell = \mathcal{O}_\ell(2) \to T_Q|_\ell$, donc $a_n \geqslant 2$. De plus, l'existence de la suite exacte suivante :

$$0 \to T_Q|_\ell \to T_{\mathbb{P}^{n+1}}|_\ell \to \mathcal{O}_\ell(2) \to 0$$

montre que $a_1 + \ldots + a_n = n$ et $a_{n-1} \leqslant 1$ et $a_n \leqslant 2$. Finalement, $a_n = 2$ donc

$$T_Q|_\ell = \mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(1)^{\oplus n-2} \oplus \mathcal{O}_\ell(2).$$

Clairement, T_Q n'est pas strictement nef sur ℓ, mais $\Lambda^2 T_Q$ l'est.

Donc $\Lambda^2 T_Q$ est strictement nef sur toutes les courbes de Q, donc d'après la proposition 3.3, $\Lambda^2 T_Q$ est strictement nef. □

Remarque 4.7. D'après le lemme de Gieseker [Laz03, proposition 6.1.7] et par le lemme 4.3, $\Lambda^2 T_Q$ est même ample.

Avec le même genre d'idées, on établit le résultat suivant.

Proposition 4.8. *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse de degré d. Alors $\Lambda^r T_X$ est ample pour tout $d \leqslant r < n$.*

Démonstration. Soit r un entier. Supposons que $d \leqslant r < n$. On a un isomorphisme :

$$\Lambda^r T_X \simeq \Lambda^{n-r}\Omega_X \otimes (-K_X),$$

et, de façon analogue pour $\mathbb{P}^{n+1}$:

$$\Lambda^{r+1} T_{\mathbb{P}^{n+1}} \simeq \Lambda^{n-r}\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n+2),$$

Comme $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, on dispose d'une surjection de $-K_X \otimes \Lambda^{n-r}\Omega_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n+2-d)|_X \otimes \Lambda^{n-r}\Omega_X$ vers $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n+2-d) \otimes \Lambda^{n-r}\Omega_{\mathbb{P}^{n+1}})|_X$. D'où l'existence d'une surjection

$$L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d) \otimes \Lambda^{r+1} T_{\mathbb{P}^{n+1}} \to \Lambda^r T_X.$$

Or, on a la suite exacte d'Euler :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)^{\oplus n+2} \to T_{\mathbb{P}^{n+1}} \to 0.$$

En passant à la puissance extérieure $r+1$-ième et en tordant par le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-d)$, il vient que L est un quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(r+1-d)^{\oplus\binom{n+2}{r+1}}$, donc il est ample. Donc $\Lambda^r T_X$ est aussi ample. $\square$

Notamment, les hypersurfaces cubiques lisses de dimension $n \geqslant 4$ ont toutes un fibré $\Lambda^3 T_X$ ample, *a fortiori* strictement nef.

Cette proposition 4.8 répète une partie de la proposition 4.3, en montrant que sur une quadrique lisse X, le fibré $\Lambda^2 T_X$ est ample. Toutefois, elle est un peu plus faible : elle ne dit rien du fibré T_X.

Les exemples suivants sont construits comme des produits. Ils admettent beaucoup de contractions extrémales fibrées. Autant pour de petits r, on a peu de tels produits, autant pour r plus grand, il y en a de plus en plus. En prévision de la sous-partie 4.7, on ne peut donc pas tellement envisager de dresser la liste des variétés X avec $\Lambda^r T_X$ strictement nef admettant au moins une contraction fibrée, si r est trop grand.

Proposition 4.9. *Soient $r, j, k \in \mathbb{N}^*$ et deux suites d'entiers $2 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_j$ et $3 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_k$. Posons $n = n_1 + \ldots + n_j$ et $m = m_1 + \ldots + m_k$.*

Soit $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_j} \times \mathbb{Q}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}^{m_k}$. Alors

$$\Lambda^r T_X \textit{ strictement nef} \iff \begin{cases} n+m \geqslant r \\ r > n - n_1 + m \\ r > n + m - m_1 + 1. \end{cases}$$

Démonstration. On sait exprimer le fibré tangent :

$$T_X = p_1^* T_{\mathbb{P}^{n_1}} \oplus \ldots \oplus p_j^* T_{\mathbb{P}^{n_j}} \oplus q_1^* T_{\mathbb{Q}^{m^1}} \oplus \ldots \oplus q_k^* T_{\mathbb{Q}^{m^k}}.$$

Supposons que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Bien sûr, $r \leqslant \dim X = n + m$.

Soit C une courbe de X qui ne vit que dans le facteur $\mathbb{P}^{n_1}$. Alors $T_X|_C$ est une somme directe de $T_{\mathbb{P}^{n_1}}|_{p_1(C)}$, qui est ample, et d'un fibré vectoriel trivial V de rang $n - n_1 + m$. Si $r \leqslant n - n_1 + m$, $\Lambda^r V$ est un facteur trivial de $\Lambda^r T_X|_C$, ce qui contredit son caractère strictement nef ! Donc $r > n - n_1 + m$.

De façon analogue, soit C une courbe de X qui ne vit que dans $\mathbb{Q}^{m_1}$ et que q_1 projette sur une droite dans $\mathbb{Q}^{m_1}$. Alors $T_X|_C$ est une somme directe d'un fibré vectoriel trivial V de rang $n + m - m_1$ et de $T_{\mathbb{Q}^{m_1}}|_{q_1(C)}$. Or, d'après la proposition 4.3, $T_{\mathbb{Q}^{m_1}}|_{q_1(C)}$ est la somme directe d'un fibré en droites trivial $\mathcal{O}$ et d'un facteur ample de rang $m_1 - 1$. Si $r \leqslant n + m - m_1 + 1$, $\Lambda^r(V \oplus \mathcal{O})$ est un facteur trivial de $\Lambda^r T_X|_C$, absurde ! Donc $r > n + m - m_1 + 1$.

Montrons maintenant l'autre sens. On suppose les inégalités *supra* vérifiées. Soit $C \subset X$ une courbe.

Supposons qu'une projection p_i ne la contracte pas. Alors $p_i^* T_{\mathbb{P}^{n_i}}|_C$ est un facteur direct ample de rang n_i de $T_X|_C$. Donc $T_X|_C$ est somme directe d'un facteur ample et d'un facteur trivial de rang au plus $n - n_i + m < r$. Donc $\Lambda^r T_X|_C$ est ample.

Sinon, on a une projection q_i qui ne contracte pas C. Alors $q_i^* T_{\mathbb{Q}^{m_i}}|_C$ contient un facteur direct ample de rang $m_i - 1$ de $T_X|_C$. Donc $T_X|_C$ est somme directe d'un facteur ample et d'un facteur trivial de rang au plus $n - m_i + m + 1 < r$. Donc $\Lambda^r T_X|_C$ est ample.

Comme $\Lambda^r T_X$ est a fortiori strictement nef sur toutes les courbes de X, il est strictement nef. $\square$

Remarque 4.10. Les briques élémentaires de cette construction sont les $\mathbb{P}^n$, car $T_{\mathbb{P}^n}$ est ample pour $n \geqslant 1$, et les $\mathbb{Q}^n$, car $\Lambda^2 T_{\mathbb{Q}^n}$ est ample pour $n \geqslant 2$, et même $T_{\mathbb{Q}^n}$ se découpe facilement en facteurs amples et triviaux comme dans la proposition 4.3. On pourrait peut-être créer des produits utilisant d'autres hypersurfaces X, à condition de mieux comprendre sur quelles courbes les fibrés intermédiaires $T_X, \dots, \Lambda^{r-1} T_X$ sont amples ou ont des facteurs triviaux... Il faudrait un résultat un peu plus puissant que la proposition4.8.

4.2 Un lemme général de Li-Ou-Yang

Cette sous-partie présente juste un lemme facile, qui servira très fréquemment dans la suite :

Lemme 4.11. *Soit X une variété sur laquelle $\Lambda^r T_X$ est strictement nef pour un certain $r \in [\![1, n-1]\!]$. Pour toute courbe rationnelle C dans X, on a $-K_X.C \geqslant n+2-r$.*

Démonstration. L'argument est tel que dans l'article [LOY18]. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to C \subset X$ la normalisation de C. Ce morphisme étant surjectif et fini, un fibré sur C est strictement nef si et seulement s'il l'est sur sa normalisée. On écrit :

$$f^* T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n),$$

avec $a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n$. On a $a_n \geqslant 2$ car T_C a un morphisme non nul dans $f^* T_X$, et $a_1 + \dots + a_r > 0$ car $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1 + \dots + a_r)$ est un facteur direct du fibré strictement nef $\Lambda^r f^* T_X$. En particulier, on a donc $a_r > 0$.

Donc

$$-K_X.C = \deg f^*(-K_X) = a_1 + \dots + a_n \geqslant 1 + a_{r+1} + \dots + a_n \geqslant 1 + n - r + 1 = n + 2 - r.$$

□

4.3 L'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski

On rappelle ici une inégalité importante pour l'étude de contraction de Mori : l'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski ([Ion86, théorème 0.4] et [Wiś91, théorème 1.1]). Préparons-la par une définition.

Définition 4.12. Soit X une variété projective lisse. Si R est un rayon extrémal de $\overline{NE}(X)$, on peut définir sa *longueur* :

$$\ell(R) = \min\{-K_X.C \mid C \text{ courbe rationnelle, } [C] \in R\}.$$

D'après le théorème de cône, c'est un entier compris entre 1 et $n+1$.

Proposition 4.13. *Soit X une variété projective lisse de dimension n, $\varphi : X \to Y$ une contraction extrémale de rayon associé R. Soient E une composante irréductible du lieu exceptionnel de φ, F une composante irréductible d'une fibre de φ incluse dans E. Alors :*

$$\dim E + \dim F \geqslant n + \ell(R) - 1.$$

4.4 Quelques rappels sur les familles indivisibles de courbes rationnelles

On rappelle ici quelques définitions, notations et résultats sur les familles de déformations de courbes rationnelles, en commençant par définir les familles de 1-cycles algébriques.

Soit X une variété projective lisse. On peut construire l'*espace de Chow* de X, notée $\mathrm{Chow}(X)$, et la *famille universelle associée* $\mathrm{Univ}(X)$. L'espace de Chow peut être muni d'une structure de schéma projectif singulier. La famille universelle vient avec deux morphismes naturels :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Univ}(X) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & \mathrm{Chow}(X) \\ X & \end{tikzcd}$$

L'espace de Chow représente les 1-cycles de X au sens où : pour tout 1-cycle $f : \mathbb{P}^1 \to X$ d'image $Z \subset X$, il existe un point $z \in \mathrm{Chow}(X)$ qui vérifie $\mathrm{ev}(\varphi^{-1}(z)) = Z$. On se permet de confondre allègrement de tels z et Z dans la suite.

La construction de $\mathrm{Chow}(X)$ et de $\mathrm{Univ}(X)$ est un peu technique, et on renvoie à [Kol96, chapitre I.3] pour son exposé détaillé.

Définition 4.14. Une *famille de 1-cycles* dans X est un fermé irréductible $\mathcal{V} \subset \mathrm{Chow}(X)$. Le *lieu* d'une telle famille est défini par :

$$\mathrm{Lieu}(\mathcal{V}) = \mathrm{ev}(\varphi^{-1}(\mathcal{V})).$$

Les définitions à suivre rejoignent celles de [CMSB02, page 16].

Définition 4.15. Une *famille de courbes rationnelles* est une famille de 1-cycles $\mathcal{V}$ dont le point générique v est une courbe rationnelle réduite.

On peut définir des familles de courbes rationnelles de la façon suivante :

Définition 4.16. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ une courbe rationnelle. La *famille associée à cette courbe* est la composante irréductible de $\mathrm{Chow}(X)$ contenant $[f]$. Certains des points dans la famille représentent des courbes rationnelles (et c'est génériquement le cas), mais pas nécessairement tous.

On décrète que l'ensemble des points de la famille qui représentent des courbe rationnelles est *l'ensemble des déformations* de la courbe initiale $f : \mathbb{P}^1 \to X$. L'ensemble complémentaire est *l'ensemble des dégénérescences* de $f : \mathbb{P}^1 \to X$.

Définition 4.17. Considérons une famille de courbes rationnelles ainsi associée à une courbe. Si cette famille ne contient pas de dégénérescence, on dit qu'elle est *indivisible*.

On définit ci-dessous les familles de 1-cycles et de courbes rationnelles passant par un point fixé. Il en découle naturellement la notion de familles de 1-cycles associées à une courbe rationnelle passant par un point fixé et de familles de déformations d'une courbe rationnelle avec un point fixé.

Définition 4.18. Soit $\mathcal{V}$ une famille de 1-cycles (respectivement de courbes rationnelles), $x \in \mathrm{Lieu}(\mathcal{V})$. On définit la *famille de 1-cycles* (respectivement *de courbes rationnelles*) *de $\mathcal{V}$ passant par x*, notée $\mathcal{V}_x$, comme l'ensemble des 1-cycles (respectivement courbes rationnelles) $v \in \mathcal{V}$ tels que $x \in v$.

On a l'estimation suivante [Kol96, proposition IV.2.6] :

Proposition 4.19. *Soit X une variété propre et lisse, et $\mathcal{V}$ une famille indivisible de courbes rationnelles dans X. Alors :*

$$\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}) + \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \geqslant -K_X.\mathcal{V} + \dim X - 1,$$

où l'on note $-K_X.\mathcal{V}$ le degré de $-K_X$ sur n'importe quelle courbe rationnelle $v \in \mathcal{V}$.

Rappelons enfin quelques définitions liées à la notion de $\mathcal{V}$-équivalence au sens de [BCD07].

Définition 4.20. Une famille de 1-cycles $\mathcal{V}$ sur X est dite *dominante* (resp. *couvrante*) si $\mathrm{Lieu}(\mathcal{V})$ est dense dans X (resp. est exactement X).

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{V}$ une famille indivisible de courbes rationnelles. Si elle est dominante, elle est couvrante.*

Démonstration. Comme $\mathcal{V}$ est indivisible, $\varphi^{-1}(\mathcal{V})$ est un fermé de la famille universelle $\mathrm{Univ}(X)$ au dessus de $\mathrm{RatCurves}(X)$. Comme le morphisme d'évaluation est fermé, $\mathrm{Lieu}(\mathcal{V})$ est un fermé de X. Donc il est dense si et seulement si c'est X tout entier. □

Définition 4.22. Soit $\mathcal{V}$ une famille indivisible et couvrante de courbes rationnelles sur une variété projective X. Alors on peut considérer sur X la relation d'équivalence suivante : $x, y \in X$ sont dits *$\mathcal{V}$-équivalents* s'il existe $x \in C_1, \ldots, C_k \ni y$ des courbes de $\mathcal{V}$ telles que pour tout i, $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing$.

On note alors $f_{\mathcal{V}}$ la dimension d'une $\mathcal{V}$-classe d'équivalence générale.

Remarque 4.23. On a une minoration facile de cette dimension. Fixons $x \in \mathrm{Lieu}(\mathcal{V})$.

$$f_{\mathcal{V}} \geqslant \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \geqslant -K_X.\mathcal{V} - 1,$$

d'après la proposition 4.19.

Dans ce contexte, [BCD07, théorème 2] établit le résultat suivant :

Théorème 4.24. *Soit $\mathcal{V}$ une famille indivisible et couvrante de courbes rationnelles sur une variété projective lisse X. Si $f_{\mathcal{V}} \geqslant \dim X - 3$, alors il existe un morphisme $X \to Y$ dont les fibres sont exactement les $\mathcal{V}$-classes d'équivalence, et qui est une contraction extrémale pour X.*

Corollaire 4.25. *Soit $\mathcal{V}$ une famille indivisible et couvrante de courbes rationnelles sur une variété projective lisse X. Si $-K_X.\mathcal{V} \geqslant \dim X - 2$, alors on a la même conclusion : il existe un morphisme $X \to Y$ dont les fibres sont exactement les $\mathcal{V}$-classes d'équivalence, et qui est une contraction extrémale pour X.*

4.5 Un point sur les fibrés projectifs et les fibrés projectivisés

Dans cette sous-partie, on travaille toujours sur des variétés algébriques complexes. Pourtant, cette hypothèse est superflue : tout reste vrai en remplaçant la topologie analytique par la topologie étale (avec le remplacement de cohomologie qui s'impose). Mais je ne suis pas très familière avec le monde étale, d'où le choix de rédaction. Rappelons la différence entre un fibré projectif et un fibré projectivisé.

Définition 4.26. Un *fibré projectif* de rang n sur une variété B est la donnée d'une variété E avec un morphisme $p : E \to B$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert pour la topologie analytique $B = \bigcup U_i$ tel que :

- pour tout i, $p^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{P}^n \times U_i$ via un isomorphisme f_i,
- pour tous $i \neq j$ et tout $x \in p(U_i \cap U_j)$, $f_i \circ f_j^{-1}$ restreinte à la fibre $p^{-1}(x)$ est un élément de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$.

Donnons le pendant zariskien de cette définition. C'est une notion qu'on n'emploiera que brièvement, on verra bientôt pourquoi.

Définition 4.27. Un *fibré Zariski-projectif* de rang n sur une variété B est la donnée d'une variété E avec un morphisme $p : E \to B$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert pour la topologie de Zariski $B = \bigcup U_i$ tel que :

- pour tout i, $p^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{P}^n_{U_i}$ via un isomorphisme f_i,
- pour tous $i \neq j$ et tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(A) \subset U_i \cap U_j$, $f_i \circ f_j^{-1}|_{f_j(V)}$ correspond à un automorphisme A-linéaire dans l'anneau de polynômes homogènes $A[x_0, \ldots, x_n]$ de spectre $\mathbb{P}^n_V$.

D'autre part, on a la notion de fibré projectivisé.

Définition 4.28. Soit B une variété et V un fibré vectoriel sur B. Le *fibré projectivisé* associé à V est une variété notée $\mathbb{P}(V)$, qui vient avec un morphisme naturel p vers B et un fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$, quotient de p^*V. On le définit comme le représentant du foncteur F défini ci-dessous.

Soit $\mathcal{M}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes algébriques de but B et dans laquelle les morphismes entre deux objets p et q sont les flèches verticales f qui font commuter le triangle :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & B \\ Y \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{AlgVar} \times \mathcal{M}$ dont les objets sont les couples (X, f) tels que $f : X \to B$. On définit le foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, qui à (X, f) associe l'ensemble des fibrés en droites L sur X quotients de f^*V.

Bien sûr, tout fibré projectivisé est un fibré projectif. Pour peu que B soit régulière (c'est-à-dire lisse, en langage algébrique complexe), d'après [Har77, partie II, exercice 7.10(c)], les fibrés projectivisés sont exactement les fibrés Zariski-projectifs sur B. En revanche, tout fibré projectif sur B n'est pas forcément un fibré projectivisé, et ce même si B est lisse. L'obstruction à cela est le groupe de Brauer de B.

Définition 4.29. Soit B une variété lisse. On définit son *groupe de Brauer* :

$$\mathrm{Br}(B) = H^2_{an}(\underline{\mathbb{C}^*}).$$

Proposition 4.30. *Soit B une variété lisse. Supposons que $\mathrm{Br}(B)$ est trivial. Alors tout fibré projectif sur B est un fibré projectivisé.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On a la suite exacte de faisceaux cohérents suivante

$$0 \to \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \to 0,$$

qui donne en cohomologie

$$0 \to H^1_{an}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{\varphi_n} H^1_{an}(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \to \mathrm{Br}(B) \to \ldots$$

Donc la trivialité du groupe de Brauer de B implique les surjectivités de tous les φ_n.

D'une part, le groupe $H^1_{an}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ s'identifie (par les cocycles) aux fibrés vectoriels analytiques de rang n sur B. D'après l'équivalence de catégorie GAGA, qui sont exactement les fibrés vectoriels algébriques de rang n sur B. Donc $H^1_{an}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq H^1_{Zar}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$.

D'autre part, $H^1_{an}(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}))$ s'identifie aux fibrés projectifs de rang $n-1$ sur B.

Comme φ_n est surjectif, tout fibré projectif E de rang $n-1$ sur B a les mêmes cocycles qu'un fibré vectoriel V de rang n sur B. De plus, le cas échéant, on a $E = \mathbb{P}(V)$. D'où la proposition. □

Remarque 4.31. On retrouve notamment que, si B est une courbe, tout fibré projectif sur B est un fibré projectivisé. En particulier, il admet une section (on retrouve le théorème de Tsen).

De plus, le groupe de Brauer de $\mathbb{P}^n$ est simple à calculer : avec la suite exacte exponentielle

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$$

et le fait que pour $i \geqslant 1$, $H^i(\mathbb{Z}) = H^i(\mathbb{C}) = 0$, on voit bien qu'il est trivial. D'où ce corollaire très important :

Corollaire 4.32. *Tout fibré projectif dont la base est un espace projectif $\mathbb{P}^n$ est de la forme $\mathbb{P}(V)$, avec V un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^n$.*

4.6 Les contractions birationnelles

Soit X une variété projective lisse de dimension n, et $r \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef. Rappelons qu'une contraction extrémale birationnelle est soit une contraction divisorielle, soit une petite contraction.

Lemme 4.33. *Si $r \leqslant 4$, X n'admet pas de petite contraction.*

Démonstration. Supposons que X admet un contraction birationnelle φ, et reprenons les notations de la proposition 4.13. En l'appliquant directement, avec le lemme 4.11, il vient :

$$\dim E \geqslant n - \frac{r-1}{2}.$$

Donc, si $r \leqslant 4$, $\dim E \geqslant n-1$ et φ est une contraction divisorielle. □

Dorénavant, on suppose $r \leqslant 4$. En raffinant un peu le lemme ci-dessus, on peut montrer que :

Corollaire 4.34. *Si $r = 1, 2$, X n'admet pas de contraction birationnelle.*

Corollaire 4.35. *Si $r = 3$ et X admet une contraction birationnelle, alors il s'agit d'un éclatement le long d'un point lisse.*

Démonstration. Supposons $r = 3$, et soit φ une contraction extrémale birationnelle de X, avec les notations habituelles. D'après [Deb11, proposition 8.7], le lieu exceptionnel de φ est le diviseur irréductible E. On voit qu'on se trouve dans le cas d'égalité du lemme 4.33 : $\dim E = \dim F = n-1$, donc $\varphi(E)$ est un point. Par ailleurs, il y a égalité dans l'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski. Dès lors, [AO02, théorème 5.2] conclue. □

Remarque 4.36. Si $r = 4$, on peut entamer un raisonnement analogue. Toujours avec les notations de la proposition 4.13,

- si $\ell(R) = n-1$, on retrouve la même situation, et la contraction est un éclatement le long d'un point lisse ;
- sinon, $\ell(R) = n-2$, donc $\dim F \geqslant n-2$ pour toute composante irréductible de fibre $F \subset E$. Il reste deux sous-cas :
  - si $\dim F = n-2$, il y a égalité dans l'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski, et [AO02, théorème 5.2] s'applique encore. Dans ce cas, φ est un éclatement le long d'une courbe lisse.
  - sinon, $\dim F = n-1$, donc φ contracte E sur un point. Je ne comprends pas encore bien ce que peut être φ dans cette situation.

Enfin, on comprend bien le passage aux éclatements le long de points lisses :

Proposition 4.37. *Supposons ici $r \in [\![1, n-1]\!]$. Soit X une variété projective lisse. S'il existe $X \to Y$ un éclatement le long d'un point lisse, alors $\Lambda^r T_X$ n'est pas strictement nef.*

Démonstration. On considère un éclatement le long d'un point lisse :

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & Y \\ \cup & & \Cup \\ E & \mapsto & p. \end{array}$$

Supposons par l'absurde que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef.

D'après le théorème 3.12, X est rationnellement connexe, donc Y aussi. En particulier, on dispose d'une courbe rationnelle K passant par p. Par Bend-and-Break, on peut supposer $-K_Y.K \leqslant n+1$. Sa transformée stricte $C \subset X$ vérifie $E.C > 0$. Comme $-K_X = f^*(-K_Y) - (n-1)E$,

$$n + 2 - r \leqslant -K_X.C \leqslant -K_Y.K - (n-1) \leqslant 2,$$

ce qui est absurde à cause du lemme 4.11 ! Donc $\Lambda^r T_X$ n'est pas strictement nef. □

Finalement, ce résultat a pour conséquence ce

Corollaire 4.38. *Si $r = 3, n \geqslant 4$ et X est une variété projective lisse de dimension n sur laquelle $\Lambda^3 T_X$ est strictement nef, alors X n'admet pas de contraction birationnelle.*

4.7 Les contractions fibrées

Soit X une variété projective lisse de dimension n, Y une variété projective normale localement $\mathbb{Q}$-factorielle de dimension strictement positive, et $r \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons que $\Lambda^r T_X$ est strictement nef.

Proposition 4.39. *Supposons qu'il existe une contraction de Mori fibrée $\pi : X \to Y$. Alors la fibre générale est de dimension au plus $r-1$.*

La preuve utilise les deux énoncés qui suivent.

Lemme 4.40. *Supposons seulement qu'il existe une fibration $\pi : X \to Y$. Il existe une courbe rationnelle C que π ne contracte pas, et telle que $-K_X.C$ est minimal. Sa famille de déformations $\mathcal{V}$ est indivisible. De plus, pour $x \in C$,*

$$\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \geqslant n + 1 - r.$$

Lemme 4.41. *Soit X une variété projective admettant une contraction de Mori $\pi : X \to Y$ de fibre générale F. On dispose sur X une famille indivisible $\mathcal{V}$, correspondant aux déformations d'une courbe rationnelle C que π ne contracte pas. Pour $x \in C$ fixé,*

$$\pi|_{\mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x)} \text{ est fini sur son image.}$$

Démonstration du lemme 4.40. Soit $\pi : X \to Y$ notre fibration. Comme X est rationnellement connexe, l'ensemble des courbes rationnelles dans X non contractées par π est non vide. On dispose donc d'une telle courbe telle que $-K_X.C$ soit minimal.

Soit $\mathcal{V}$ la famille de déformations associée. Montrons que $\mathcal{V}$ est indivisible. On raisonne par l'absurde. S'il existe une scission

$$C \underset{\text{num}}{\equiv} \sum_i a_i C_i,$$

où les C_i sont des courbes rationnelles irréductibles réduites et les $a_i \geqslant 1$ sont des coefficients entiers en nombre fini tels que $\sum a_i \geqslant 2$, alors, par minimalité, π contracte toutes les courbes C_i. Soit H un diviseur ample sur Y ; on a donc $C_i.\pi^*H = 0$ pour tout i, donc $\pi_*C.H = 0$, d'où $K.H = 0$, ce qui est absurde !

Donc $\mathcal{V}$ est une famille indivisible de courbes rationnelles.

Par la proposition 4.19, on a :

$$\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}) + \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \geqslant \dim X - K_X.C - 1. \tag{1}$$

Donc, d'après le lemme 4.11, $\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \geqslant n + 1 - r$. □

Démonstration du lemme 4.41. Supposons *a contrario* que $\pi|_{\mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x)}$ n'est pas fini : il contracte une courbe K. Soit H un diviseur ample sur Y. On a donc $K.\pi^*H = 0$. D'après [ACO09, lemme 4.1], la courbe $K \subset \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x)$ a la classe numérique d'un multiple de $C \in N_1(X)_{\mathbb{Q}}$, d'où $C.\pi^*H = 0$. Donc π contracte C, et c'est absurde. □

Démonstration de la proposition 4.39 avec ces deux lemmes. Soit C donnée par le lemme 4.40, $\mathcal{V}$ la famille de déformations associée. D'après le lemme 4.41, la restriction de π à $\mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x)$ est un morphisme fini sur son image. Notons d la dimension de sa fibre générale. Alors $\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \leqslant \dim Y = n - d$, ce qui se réécrit :

$$d \leqslant n - \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) \leqslant r - 1. \tag{2}$$

□

La proposition 4.39 a plusieurs conséquences.

Corollaire 4.42. *Si X admet une contraction de Mori fibrée $X \to Y$ avec $\dim Y > 0$, alors*

$$n \leqslant 2r - 2. \tag{3}$$

Démonstration. Il suffit de mettre bout à bout la proposition 4.39, l'inégalité d'Ionescu-Wiśnewski (proposition 4.13) et le lemme 4.11. □

Remarque 4.43. Ainsi, si $r = 1, 2$, X n'admet pas de contraction extrémale fibrée vers Y de dimension non nulle.

Théorème 4.44. *Supposons que $r = 3$ ou que $r = 4$ et $n = 6$. Si X admet une contraction de Mori fibrée vers une variété de dimension non nulle, alors $X \cong \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{r-1}$.*

Démonstration. Soit $\pi : X \to Y$ notre contraction de Mori fibrée. Si $r = 3$, d'après le corollaire 4.42, on a $4 = r + 1 \leqslant n \leqslant 2r - 2 = 4$. Donc, que $r = 3$ ou 4, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité (3). Cela nous place aussi dans le cas d'égalité des inégalités (2) et (1).

Première conséquence : si on note F la fibre générale de π, $\dim F = r - 1$.

Deuxième conséquence : on dispose d'une courbe rationnelle C que π ne contracte pas, telle que $-K_X.C = r$. Soit $\mathcal{V}$ la famille des déformations de C. D'après le lemme 4.40, elle est indivisible et, pour tout $x \in C$, $\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) = n + 1 - r$. Donc

$$\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V} = n + r - 1 - \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) = 2r - 2 = n$$

et ainsi $\mathcal{V}$ est couvrante.

D'après un résultat de Bonavero-Casagrande-Druel rappelé dans le corollaire 4.25, il existe une contraction de Mori fibrée $\varphi : X \to Z$ dont les fibres sont exactement les classes de $\mathcal{V}$-équivalence. Ainsi, la fibre générale a dimension

$$n - \dim Z \geqslant \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) = n + 1 - r = r - 1$$

et d'après le lemme 4.41,

$$\dim Z \geqslant \dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) = n + 1 - r.$$

On est dans le cas d'égalité : donc la fibre générale a dimension $r - 1$. De plus, toutes les fibres particulières ont dimension au moins $\dim \mathrm{Lieu}(\mathcal{V}_x) = r - 1$.

Supposons, par l'absurde, qu'une fibre particulière G de φ est de dimension supérieure ou égale à r. Son intersection avec la fibre générale F de $\pi : X \to Y$ est non vide ; elle contient un point p. Donc, en comparant les dimensions des espaces tangents en p, il vient qu'il existe une courbe incluse dans $F \cap G$. Une telle courbe est dans une $\mathcal{V}$-classe d'équivalence, donc a le type numérique de C, mais π la contracte. Or π ne contracte pas C, absurde !

Donc $X \to Z$ est finalement une fibration équidimensionnelle.

À partir de maintenant, la proposition 4.45 ci-dessous nous permet de conclure. □

Proposition 4.45. *Soit $r \geqslant 3$. Supposons que $n = 2r - 2$. Si X admet une contraction extrémale fibrée équidimensionnelle, alors $X \cong \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{r-1}$.*

Pour montrer ce lemme, on utilise le résultat suivant :

Lemme 4.46. *Supposons que $\pi : X \to Y$ est un fibré projectif. Alors pour tout courbe rationnelle C dans Y, on a*

$$-K_Y.C \geqslant n + 2 - r,$$

avec égalité seulement[4] *s'il existe L fibré en droites sur C tel que $\pi^{-1}(C)$ est isomorphe au fibré projectivisé $\mathbb{P}(L^{\oplus k})$.*

Démonstration. Notons $\pi : X \to Y$ le morphisme naturel. Soit C une courbe rationnelle dans Y. D'après le corollaire 4.32, le fibré projectif $\pi_C : \pi^{-1}(C) \to C$ est le projectivisé d'un fibré vectoriel V sur C. Les sections de π_C sont donc en bijection avec les sous-fibrés en droites quotients de V.

Soit s une section dont le fibré en droites associé est de degré minimal : autrement dit, si on écrit

$$V \simeq \mathcal{O}_C(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_C(a_k),$$

avec $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_k$, on a $s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \simeq \mathcal{O}_C(a_1)$. Par conséquent :

$$\deg \det s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes V^* \leqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \ldots = a_k$, c'est-à-dire que $V \simeq \mathcal{O}_C(a_1)^{\oplus k}$.

Il y a la suite exacte relative d'Euler associée à π_C, qu'on tire en arrière par s^* sur C :

$$0 \to \mathcal{O}_C \to s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes V^* \to s^*T_{X/Y}|_{s(C)} \to 0,$$

et la suite exacte de fibrés tangents pour $\pi : X \to Y$, restreinte à $s(C)$ et tirée en arrière par s^* :

$$0 \to s^*T_{X/Y}|_{s(C)} \to s^*T_X|_{s(C)} \to T_Y|_C \to 0,$$

qui donnent, en passant au déterminant et en calculant les degrés :

$$-K_Y.C \geqslant -K_X.s(C) \geqslant n + 2 - r,$$

avec égalité seulement si $V \simeq \mathcal{O}_C(a_1)^{\oplus k}$. □

Démonstration de la proposition 4.45. Soit $\varphi : X \to Y$ une contraction extrémale fibrée équidimensionnelle. On est dans les cas d'égalité des inégalités (3), (2), (1). En particulier, toutes les fibres de φ sont de dimension $r - 1$.

On peut appliquer [HN13, théorème 1.3] : la contraction extrémale $\phi : X \to Y$ est un fibré projectif.

Montrons que Y est isomorphe à $\mathbb{P}^{r-1}$. D'après le lemme 4.46, pour toute courbe rationnelle C dans Y, on a

$$-K_Y.C \geqslant n + 2 - r = r.$$

Comme X est rationnellement connexe, Y est aussi rationnellement connexe, *a fortiori* uniréglée. D'après [CMSB02, corollaire 0.4, équivalence entre 1. et 10.], on a donc $Y \cong \mathbb{P}^{r-1}$.

D'après le corollaire 4.32, les fibrés projectifs sur Y sont des fibrés projectivisés. Donc on dispose d'un fibré vectoriel V sur Y tel que $\pi : X \simeq \mathbb{P}(V =\to Y$ est le morphisme naturel.

Montrons maintenant que le fibré vectoriel V est trivial. Soit $\Delta \subset Y$ une droite. On a $-K_Y.\Delta = r$. C'est le cas d'égalité du corollaire 4.32, donc $V|_\Delta \simeq L^{\oplus r}$ pour un certain fibré en droites L sur Δ. Permettons-nous de normaliser V : quitte à tensoriser par le fibré en droites det V^*, on peut supposer que V est de degré nul sur toutes les droites de Y. Comme $\deg L = 0$, $L = \mathcal{O}_\Delta$ et V est trivial sur Δ.

Dès lors, un argument d'homogénéité exposé dans [OSS80, théorème 3.2.1] permet de conclure que V est globalement trivial. Donc $X \cong \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{r-1}$. □

Citons d'ailleurs un petit corollaire du lemme 4.46, qui sert dans la suite :

Corollaire 4.47. *Rappelons qu'on suppose $\Lambda^r T_X$ strictement nef, avec $r \in [\![1, n-1]\!]$. Il n'existe pas de structure de fibré projectif $\pi : X \to \mathbb{P}^1$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle structure π, et appliquons le lemme 4.46. Comme $-K_{\mathbb{P}^1}.\mathbb{P}^1 = 2$, il vient $2 \geqslant n + 2 - r$, donc $r \geqslant n$, contradiction ! □

Je m'arrête ici dans l'étude des contractions de Mori fibrées. Peut-être un cas encore simple à traiter et néanmoins intéressant serait $r = 4, n = 5$. C'est le seul cas qui manque pour établir la conjecture suivante.

Remarque 4.48. Soit X de dimension $n \geqslant 5$, sur laquelle $\Lambda^4 T_X$ est strictement nef. Supposons que X admet une contraction extrémale fibrée. On conjecture qu'alors $X \cong \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ ou $X \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{Q}^3$.

4. C'est nécessaire, pas suffisant.

5 Bilan pour de petites valeurs de r

5.1 Les cas traités par Li-Ou-Yang : $r = 1, 2$

À partir des résultats établis ci-dessus, on peut conclure pour $r = 1, 2$.

Pour $r = 1, 2$: soit X une variété projective lisse telle que T_X ou $\Lambda^2 T_X$ est strictement nef. On a montré que X n'admet pas ni de contraction de Mori birationnelle, ni de contraction de Mori fibrée. Donc $\rho(X) = 1$ et comme $-K_X$ est nef et pas numériquement trivial, il est ample. Donc X est une variété de Fano.

Si $r = 1$, d'après le lemme 4.11 et [CMSB02, corollaire 0.3], X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$.

Si $r = 2$ et $n \geqslant 3$, d'après le lemme 4.11 et [DH17], X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$, à $\mathbb{Q}^n$ ou à un fibré projectif sur une courbe. Finalement, d'après le corollaire 4.47, X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$ ou à $\mathbb{Q}^n$. Pour $r = n = 2$, on retrouve exactement les surfaces de Del Pezzo, d'après [Mae93].

5.2 Le cas $r = 3$

Soit X une variété projective lisse telle que $\Lambda^3 T_X$ est strictement nef. Si $\dim X = 3$, d'après [Ser95], c'est une variété de Fano.

Suppusons que $\dim X \geqslant 4$. On a vu que X n'admet pas de contraction de Mori birationnelle. Si $\rho(X) \geqslant 2$, elle admet tout de même une contraction extrémale fibrée vers une variété de dimension non nulle. D'après le théorème 4.44, X est alors isomorphe à $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

Reste le cas où $\rho(X) = 1$, et d'après la proposition 4.1, X est Fano. On a vu dans la sous-partie 4.1 qu'une telle variété X peut notamment être isomorphe à $\mathbb{P}^n$, à $\mathbb{Q}^n$ ou encore à une hypersurface cubique lisse. Mais je ne sais pas si cette liste est exhaustive.

Références

[ACO09] Marco Andreatta, Elena Chierici et Gianluca Occhetta : Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties. *Central Europen Journal of Mathematics*, 2(2):272–293, 2009.

[AO02] Marco Andreatta et Gianluca Occhetta : Special rays in the Mori cone of a projective variety. *Nagoya Mathematical Journal*, 168:127–137, 2002.

[BCD07] Laurent Bonavero, Cinzia Casagrande et Stéphane Druel : On covering and quasi-covering families of curves. *Journal of the European Mathmatical Society*, 9:45–57, 2007.

[Bea78] Arnaud Beauville : Surfaces algébriques complexes. *Astérisque*, 54, 1978.

[CH17] Junyan Cao et Andreas Höring : A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle. arXiv :1706.08814, 2017.

[CMSB02] Koji Cho, Yoichi Miyaoka et Nicholas Ian Shepherd-Barron : Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. *In Higher dimensional birational geometry*, volume 35 de *Higher dimensional birational geometry*, pages 1–88. Advanced Studies in Pure Mathematics, Tokyo, 2002.

[Deb11] Olivier Debarre : Introduction to Mori theory. notes de cours de M2, Université Paris-Diderot, 2011.

[DH17] Thomas Dedieu et Andreas Höring : Numerical characterisation of quadrics. *Algebraic Geometry*, 4(1):120–135, 2017.

[Har] Robin Hartshorne : Ample subvarietes of algebraic varieties. 156.

[Har66] Robin Hartshorne : Ample vector bundles. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, 29:63–94, 1966.

[Har77] Robin Hartshorne : *Algebraic Geometry*, volume 52 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.

[HN13] Andreas Höring et Carla Novelli : Mori contractions of maximal length. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 49(1):215–228, 2013.

[Ion86] Paltin Ionescu : Generalized adjunction and applications. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 99(3):457–472, 1986.

[Kol96] János Kollár : *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Laz03] Robert Lazarsfeld : *Positivity in Algebraic Geometry, II*, volume 49 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, 2003.

[LOY18] Duo Li, Wenhao Ou et Xiaokui Yang : On projective varieties with strictly nef tangent bundles. arXiv :1801.09191, Jan 2018.

[Mae93] Hidetoshi Maeda : A criterion for a smooth surface to be Del Pezzo. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 113(1):1–3, 1993.

[MM81] Shigeru Mukai et Shigefumi Mori : Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geqslant 2$. *Manuscripta mathematica*, 36:147–162, 1981.

[Mok08] Ngaiming Mok : Recognizing certain rational homogeneous manifolds with Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. *In Third International Congress of Chinese Mathematicians*, volume 2, pages 41–61. American Mathematical Society, 2008.

[Mor79] Shigefumi Mori : Projective manifolds with ample tangent bundle. *Annals of Mathematics*, 110:593–606, 1979.

[OSS80] Christian Okonek, Michael Schneider et Heinz Spindler : *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1980.

[Pau97] Mihai Paun : Sur le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 324(11): 1249–1254, 1997.

[Ser95] Fernando Serrano : Strictly nef divisors and Fano threefolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 464:187–206, 1995.

[Wiś91] Jaroslaw Wiśniewski : On contractions of extremal rays of Fano manifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 417:141–157, 1991.

[WSC04] Jaroslaw Wiśniewski et Luis Eduardo Solá Conde : On manifolds whose tangent bundle is big and 1-ample. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 89(3):273–290, 2004.